

2025年度 鳥取大学 (前期)

医学部

試験時間：120 分

📖 全問必答

1 数列 $\{a_n\}$ を次の ①～③ を満たす等比数列とする。

① すべての自然数 n について $a_n > 0$

② $a_1 = 2560$

③ $a_1 + a_2 + a_3 = 4480$

また、 $S_n = \sum_{k=1}^n \log_2 a_k$ とおく。以下の問いに答えよ。ただし、 $\log_{10} 2 = 0.301$ とする。

- (1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を n を用いて表せ。
- (2) S_n が最大となるときの n の値を求めよ。
- (3) $|S_n|$ が最小となるときの n の値を求めよ。

2 a を実数の定数とする。O を原点とする座標平面上を運動する点 P の時刻 t における座標 (x, y) が t の関数として

$$x = e^{at} \cos t, \quad y = e^{at} \sin t$$

で表されるとき、時刻 t における点 P の速度を $\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right)$ で表す。以下の問いに答えよ。

- (1) $\frac{dx}{dt}$ および $\frac{dy}{dt}$ を求めよ。
- (2) 時刻 t における点 P の速さ $|\vec{v}|$ を求めよ。
- (3) $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ とおく。時刻 t において、 \vec{p} と \vec{v} のなす角を $\theta (0 \leq \theta \leq \pi)$ とする。 $\cos \theta$ を a を用いて表し、 θ は t によらない定数であることを示せ。
- (4) (3) で定めた角 θ の値が $\theta = \frac{\pi}{6}$ であるとき、定数 a を求めよ。

3 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{1}{16}(x+2)^2(x-2)^2$$

と定める。 $0 \leq t \leq 1$ を満たす実数 t に対して、直線 $y = t$ と曲線 $y = f(x)$ によって囲まれる図形を y 軸の周りに 1 回転させてできる回転体の体積を $V(t)$ とおく。以下の問いに答えよ。

- (1) 曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = t$ の交点の x 座標を k とするとき、 k^2 をすべて求めよ。
- (2) $V(t)$ を t を用いて表せ。
- (3) $V(t)$ の最小値と、そのときの t の値を求めよ。

4 正の定数 $a > 0$ に対し, xy 平面上の放物線 $y = \frac{1}{2a}x^2$ 上の点 $\left(t, \frac{t^2}{2a}\right)$ (ただし $t \neq 0$) における法線 n_t に関して, 直線 $x = t$ と対称な直線を ℓ_t とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 法線 n_t の方程式を a, t を用いて表せ。
- (2) 直線 ℓ_t の傾きを a, t を用いて表せ。
- (3) 直線 ℓ_t は t によらない一つの定点を通ることを示せ。

2025年度 鳥取大学 (前期)

医学部

(略解)

☞ 証明, 図示などは省略

1

(1) $a_n = 5 \cdot 2^{10-n}$

(2) $n = 12$

(3) $n = 24$

2

(1) $\frac{dx}{dt} = e^{at}(a \cos t - \sin t), \frac{dy}{dt} = e^{at}(a \sin t + \cos t)$

(2) $|\vec{v}| = \sqrt{a^2 + 1}e^{at}$

(3) $\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}}$, 証明は省略

(4) $a = \sqrt{3}$

3

(1) $k^2 = 4(1 \pm \sqrt{t})$

(2) $V(t) = 4\pi \left(\frac{1}{3} - t + 2t^{\frac{3}{2}} \right)$

(3) 最小値: $\frac{32}{27}\pi$ ($t = \frac{1}{9}$)

4

(1) $y = -\frac{a}{t}(x - t) + \frac{t^2}{2a}$

(2) $\frac{t^2 - a^2}{2at}$

(3) 証明は省略