

2025 年度 高知大学（前期）**医学部**

試験時間：120 分

 全問必答**1** a, b を正の整数とし、集合 P, Q を次で定義する。

$$P = \{(x, y) \mid x, y \text{ は整数 かつ } x^2 + y^2 \leq a^2\}$$

$$Q = \{(x, y) \mid x, y \text{ は整数 かつ } (x - b)^2 + y^2 \leq 4a^2\}$$

また、有限集合 A の要素の個数を $n(A)$ で表す。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $a = 1$ のとき、 $n(P)$ の値を求めよ。
- (2) $a = 2$ のとき、 $n(Q)$ の値を求めよ。
- (3) $b = a^2 - 10$ を満たすとする。このとき、 $n(P \cup Q) \neq n(P) + n(Q)$ となる a の値をすべて求めよ。
- (4) $b = 20$ のとき、 $n(P \cup Q)$ が奇数となるような最小の a の値を求めよ。

2 a, b, p, q, r を実数とする。 xy 平面上の 2 つの曲線 C_1 と C_2 を次で定義する。

$$C_1 : y = -x^3 + ax^2 + 2ax + b$$

$$C_2 : y = x^3 + px^2 + qx + r$$

C_1 と C_2 は $x = -1$ で共有点 P を持ち、点 P において共通の接線 ℓ を持つとする。さらに、 C_1, C_2, ℓ は、 $x = \frac{3}{2}$ において、1 点で交わるとする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) a の値を求めよ。
- (2) p, q の値を求めよ。また、 r を b を用いて表せ。
- (3) C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ。

3 空間の 4 点を O, A, B, C とする。 $OA = OC = \sqrt{13}$, $OB = 5$ とし、内積について、 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \vec{OB} \cdot \vec{OC} = 13$, $\vec{OA} \cdot \vec{OC} = 7$ が成り立つとする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) AB, AC の長さを求めよ。
- (2) 三角形 ABC の面積を求めよ。
- (3) 四面体 $OABC$ の体積を求めよ。
- (4) 4 点 O, A, B, C を通る球面の半径を求めよ。

4 i を虚数単位とする。複素数 α , β および実数 k が次の関係式を満たすとする。

$$0 < \arg \alpha < \pi$$

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} = \sqrt{3}$$

$$\beta = k + \frac{\sqrt{6}}{2}i$$

このとき、次の問いに答えよ。

- (1) α の値を求めよ。
- (2) $\alpha^{20} + \frac{1}{\alpha^{20}}$ の値を求めよ。
- (3) $\frac{\beta}{\alpha^4}$ の値が実数となるとき、 β の値を求めよ。
- (4) n を正の整数とする。複素数平面において、原点を O 、複素数 α^n を表す点を A 、複素数 β^n を表す点を B とする。(3) の仮定のもとで、点 A が線分 OB 上に存在するような最小の n の値を求めよ。またそのとき、線分 AB の長さを求めよ。

2025年度 高知大学（前期）**医学部**

（略解）

 証明，図示などは省略**1**

(1) 5

(2) 49

(3) 4 および 5

(4) 8

2

(1) $a = -\frac{1}{2}$

(2) $p = \frac{1}{2}, q = -5, r = b - 3$ (3) $\frac{625}{96}$

3

(1) $AB = 2\sqrt{3}, AC = 2\sqrt{3}$

(2) $3\sqrt{3}$

(3) $3\sqrt{3}$

(4) $\frac{5}{2}$

4

(1) $\frac{\sqrt{3} + i}{2}$

(2) -1

(3) $\frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}i}{2}$

(4) 最小の $n : 4, AB = 3$