2025 年度　長崎大学（前期）

医学部　試験時間：120 分

全問必答

1　以下はそれぞれ個別の問題である。各問いに答えよ。

(1)　関数 $f(x) = \log_2 x + 2\log_2(3 - x)$ の最大値と，そのときの x の値を求めよ。

(2)　数列 $\{a_n\}$ が，$a_1 = 1$，$a_2 = 4$，$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$ $(n \geqq 1)$ で定義されている。
$b_n = a_{n+1} - 2a_n$，$c_n = \dfrac{a_n}{2^n}$ とおくとき，b_n，c_n をそれぞれ n の式で表し，一般項 a_n を求めよ。

（注）(3) は選択問題である。(A)，(B) いずれか 1 問を解答すること。選択する問題のアルファベットを解答用紙にある選択欄に記入せよ。

---

(3) (A) 原点を O とする複素数平面上に，原点 O と異なる 2 点 A(α), B(β) があり，$4\alpha^2 - 6\alpha\beta + 3\beta^2 = 0$ が成り立つ。このとき，$\dfrac{\beta}{\alpha}$ の値を求めよ。また，$\dfrac{\beta}{\alpha}$ を極形式で表し，△OAB はどのような三角形か答えよ。ただし，$0 < \arg\dfrac{\beta}{\alpha} < \pi$ とする。

(B) $0 \leqq x \leqq 1$ に値をとる確率変数 X の確率密度関数が $f(x) = kx(x-1)$ であるとき，定数 k の値を求めよ。また，X が $\alpha \leqq x \leqq \beta$ の範囲の値をとる確率を $P(\alpha \leqq X \leqq \beta)$ とするとき，$0 \leqq a \leqq 1$ における $P(0 \leqq X \leqq a)$ を a を用いて表し，$P(0 \leqq X \leqq a) = \dfrac{7}{20}P(a \leqq X \leqq 1)$ を満たす定数 a の値を求めよ。

2　原点を O とする xy 座標平面上の 2 点 A$(0,\ 2)$，B$(1,\ 0)$ を通る直線を ℓ_1 とし，x 座標が $t(0 \leqq t \leqq 1)$ である線分 AB 上の点を P とする。P から x 軸，y 軸に下ろした垂線と，x 軸，y 軸との交点をそれぞれ点 Q，点 R とし，Q，R を通る直線を ℓ_2 とする。P が線分 AB 上を A から B まで動くとき，線分 QR が通過してできる図形の周および内部からなる領域を F とする。

ただし，

P が A と一致するときは，Q は O とし，R は A とする。

P が B と一致するときは，Q は B とし，R は O とする。

以下の問いに答えよ。

(1)　△AOB の周および内部からなる領域を不等式で表せ。ただし，答えのみでよい。

(2)　直線 ℓ_2 の方程式を t の 2 次方程式 $2t^2 + at + b = 0$ の形で表すとする。a，b をそれぞれ x と y の式で表せ。

(3)　点 $\left(\dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{2}\right)$ は領域 F に含まれるかどうかを調べよ。

(4)　領域 F を x と y の不等式で表せ。

(5)　解答用紙の xy 座標平面上に領域 F を図示せよ。また，領域 F が表す図形の面積 S を求めよ。

3　xyz 座標空間の xy 平面上に，原点 O を中心とする半径 1 の円 C があり，円 C の周上を動く点を $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$ とする。また，$z=1$ で表される平面 T 上に，点 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 1)$ を中心とする半径 1 の円 D があり，円 D の周上を動く点を $\mathrm{Q}(\cos(\theta+\alpha),\ \sin(\theta+\alpha),\ 1)$ とする。ただし，θ は $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ の変数とし，α は $0 \leqq \alpha \leqq \pi$ の定数とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{PR}} = t\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\ (0 \leqq t \leqq 1)$ とする。このとき，点 $\mathrm{R}(x,\ y,\ z)$ の x，y，z をそれぞれ t，θ，α を用いて表せ。

(2)　(1) の R から z 軸に垂線 RH を下ろし，2 点 R と H の距離を d とする。d^2 を α と t の式で表せ。また，t が $t=0$ から $t=1$ まで変化するとき，d の最小値を α を用いて表し，そのときの t の値を求めよ。ただし，$0 < \alpha \leqq \pi$ とする。

(3)　θ が $\theta=0$ から $\theta=2\pi$ まで変化するとき，線分 PQ が通過してできる曲面と，xy 平面と平面 T の 2 平面とで囲まれる立体 F の体積 V を α を用いて表せ。

(4)　(3) の立体 F は，定数 α の値によって様々な形状になる。立体 F の体積 V が最大，最小になるときの α の値と体積をそれぞれ求め，そのときの形状をそれぞれ答えよ。

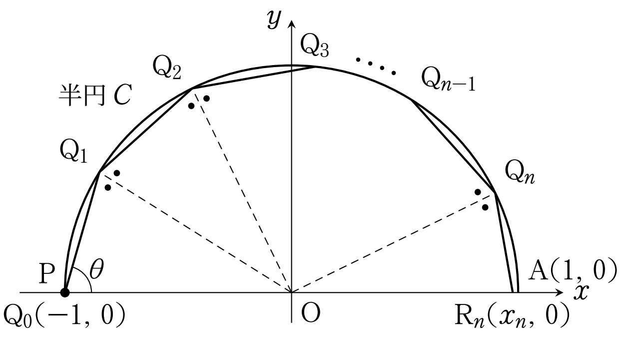
4　原点を O とする xy 座標平面上において $y=\sqrt{1-x^2}\ (-1 \leqq x \leqq 1)$ で表される半円を C とし，C 上の 2 点を $\mathrm{Q}_0(-1,\ 0)$，$\mathrm{A}(1,\ 0)$ とする。下図のように，小球 P(以下 P と呼ぶ) は Q_0 より，x 軸の正の向きとなす角が θ $\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ となるように発射され，P が C 上の点 Q_1 に達すると，$\angle \mathrm{Q}_0\mathrm{Q}_1\mathrm{O} = \angle \mathrm{O}\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2$ となるように反射される。さらに，P は C 上の点 Q_2 に達すると，同様に $\angle \mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2\mathrm{O} = \angle \mathrm{O}\mathrm{Q}_2\mathrm{Q}_3$ となるように反射される。P は，このような反射を繰り返し，はじめて x 軸に達したとき，静止するものとする。このときの反射の回数を n 回 (最後の反射する点は Q_n) とし，静止する点を $\mathrm{R}_n(x_n,\ 0)$ とする。以下の問いに答えよ。

(1)　P が，1 回の反射で A に達するときの P の軌跡を解答用紙の図 1 に示し，そのときの θ の値を求めよ。また，P が，2 回の反射で A に達するときの P の軌跡を解答用紙の図 2 に示し，そのときの θ の値を求めよ。ただし，θ の値は答えのみでよい。

(2)　P が 1 回の反射で x 軸に達するとき，θ の値の範囲を求めよ。このとき，x_1 を $\sin\theta$ の式で表し，x_1 の取り得る値の範囲を求めよ。

(3)　P が n 回の反射で x 軸に達するとき，θ の値の範囲を求めよ。また，x_n を n，θ を用いて表せ。

(4)　(3) のとき，$\triangle \mathrm{OR}_n\mathrm{Q}_n$ の面積 S_n は，$S_n = \dfrac{\tan 2n\theta \tan\theta}{2(\tan 2n\theta + \tan\theta)}$ と表されることを示し，反射の回数 n が限りなく大きくなる場合は，S_n は限りなく 0 に近づくことを証明せよ。



2025年度　長崎大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

(1)　最大値：2 $(x=1)$

(2)　$b_n=2^n,\ c_n=\dfrac{1}{2}n,\ a_n=n\cdot 2^{n-1}$

(3)　$\dfrac{\beta}{\alpha}=1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}i=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$
$\angle\mathrm{OAB}=\dfrac{\pi}{2}$，$\mathrm{OA}:\mathrm{OB}=\sqrt{3}:2$ の直角三角形

(4)　$k=-6,\ P(0\leqq X\leqq a)=-2a^3+3a^2,\ a=\dfrac{1}{3}$

2

(1)　$y\leqq -2x+2,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0$

(2)　$a=y-2x-2,\ b=2x$

(3)　含まれる

(4)　$0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 2(\sqrt{x}-1)^2$

(5)　図示は省略，$S=\dfrac{1}{3}$

3

(1)　$x=(1-t)\cos\theta+t\cos(\theta+\alpha),\ y=(1-t)\sin\theta+t\sin(\theta+\alpha),\ z=t$

(2)　$d^2=2(1-\cos\alpha)t^2-2(1-\cos\alpha)t+1$
最小値：$\cos\dfrac{\alpha}{2}\ \left(t=\dfrac{1}{2}\right)$

(3)　$V=\dfrac{\pi}{3}(2+\cos\alpha)$

(4)　最大値：$\pi\ (\alpha=0)$，円 C と円 D を底面とする高さ 1 の円柱
最小値：$\dfrac{\pi}{3}\ (\alpha=\pi)$，円 C と円 D を底面とし，点 $\left(0,\ 0,\ \dfrac{1}{2}\right)$ を頂点とした 2 つの円錐

4

(1)　図示は省略，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$，図示は省略，$\theta=\dfrac{\pi}{3}$

(2)　$0<\theta\leqq\dfrac{\pi}{4},\ x_1=\dfrac{1}{3-4\sin^2\theta},\ \dfrac{1}{3}<x_1\leqq 1$

(3)　$\dfrac{n-1}{2n}\pi<\theta\leqq\dfrac{n}{2(n+1)}\pi,\ x_n=\dfrac{\sin\theta}{(-1)^{n+1}\sin(2n+1)\theta}$

(4)　証明は省略