2025 年度　熊本大学（前期）

医学部　試験時間：120 分

全問必答

1　平面上の 4 点 A， B， C， D について，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = p > 0$， $|\overrightarrow{\mathrm{AD}}| = q > 0$， $\angle \mathrm{DAB} = \theta\ (0 < \theta < \pi)$ とする。以下の問いに答えよ。

(1)　不等式 $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{CD}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{DA}}|^2 \geqq |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{BD}}|^2$ を証明せよ。

(2)　(1) で等号が成り立つとき，四角形 ABCD の面積を p, q, θ を用いて表せ。

2　α を 0 ではない複素数とする。$z = \dfrac{\sqrt{6}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ とおき，$\beta = z\alpha$，$\gamma = z^2\alpha$ とおく。$0, \alpha, \beta, \gamma$ はそれぞれ複素数平面上の点 O, A, B, C を表すとする。ただし，i は虚数単位である。以下の問いに答えよ。

(1)　$\angle \mathrm{BOC}$ を求めよ。

(2)　複素数 δ に対し，δ が表す複素数平面上の点を D とするとき，線分 BD の垂直二等分線は A, C を通るとする。このような δ を α を用いて表せ。

(3)　$0 < \theta < \pi$ とする。点 D を，点 C を中心に θ だけ回転した点が B であるとする。このとき $\sin\theta$ を求めよ。

3　xyz 空間において，5 点 A(3， 0， 0)， B(0， 3， 0)， C(0， −3， 0)， D(3， 0， 3)， P(0， 0， 1) をとる。点 P を通り x 軸に平行な直線を ℓ とする。四面体 ABCD を ℓ の周りに 1 回転させるとき，この四面体が通過する部分の体積 V を求めよ。ただし，四面体は内部も含むものとする。

4　実数 $p > 1$ と正の整数 n に対して

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^p$$

とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n^{p+1}}$ を求めよ。

(2)　$0 \leqq \alpha < \beta$ とする。点 (α, α^p) における $y = x^p$ の接線の方程式を求めよ。また，不等式

$$\frac{1}{2}(\beta-\alpha)\{2\alpha^p + p(\beta-\alpha)\alpha^{p-1}\} \leqq \int_\alpha^\beta x^p\,dx \leqq \frac{1}{2}(\beta-\alpha)(\beta^p+\alpha^p)$$

を証明せよ。

(3)　(1) で求めた値を c とおく。$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{S_n - cn^{p+1}}{n^p}$ を求めよ。

2025 年度　熊本大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

（1）　証明は省略

（2）　$pq\sin\theta$

2

（1）　$\dfrac{\pi}{6}$

（2）　$\delta=\left(\dfrac{4-\sqrt{6}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)\alpha$

（3）　$\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{6}$

3　13π

4

（1）　$\dfrac{1}{p+1}$

（2）　接線：$y=p\alpha^{p-1}x-(p-1)\alpha^{p}$，証明は省略

（3）　$\dfrac{1}{2}$