2025年度　旭川医科大学（前期）

医学部　試験時間：120 分　　全問必答

1　次の媒介変数表示をもつ曲線 C を考える。媒介変数 t は実数全体を動くとする。

$$x = f(t) = e^t - e^{-t},\ \ y = g(t) = e^t + e^{-t}$$

このとき，次の問いに答えよ。

(1)　x，y のとりうる値の範囲をそれぞれ求めよ。

(2)　C 上の点 $(x,\ y)$ に対して，y を x を用いて表せ。

(3)　座標平面の原点を O とし，$T > 0$ に対して，$a = f(T)$，$b = g(T)$ とおき，C 上に点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ をとる。$0 \leqq x \leqq a$ における C の部分と y 軸および線分 OP によって囲まれる図形を D とする。D の面積 S を T を用いて表せ。

(4)　(3) で定めた b，D について，D を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積 V を b を用いて表せ。

2　次の問いに答えよ。

(1)　a，b，c は実数で $a>0$，$b \geqq 0$，$c \geqq 0$，$b \neq c$ とする。座標空間内の 2 点 $\mathrm{P}(a,\ 0,\ b)$，$\mathrm{Q}(0,\ a,\ c)$ を結ぶ線分 PQ を z 軸のまわりに 1 回転させて得られる曲面と 2 つの平面 $z = b$ および平面 $z = c$ で囲まれる立体 K の体積を求めよ。

(2)　t は実数で $0 < t \leqq \dfrac{\pi}{2}$，$t \neq \dfrac{\pi}{4}$ とする。

$$a = t,\ \ b = \sin t,\ \ c = \cos t$$

として (1) の立体 K の体積を $V(t)$ で表すことにする。

(i)　$0 < t < \dfrac{\pi}{2}$，$t \neq \dfrac{\pi}{4}$ の範囲で $V(t)$ が極大となる点はただ 1 つ存在することを示せ。

(ii)　(i) の極大となる点を t_0 とするとき，

$$\frac{\pi}{6} < t_0 < \frac{\pi}{4},\ \ V(t_0) < \frac{1}{10} V\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

が成り立つことを示せ。必要ならば，$3.14 < \pi < 3.15$，$1.73 < \sqrt{3} < 1.74$ を用いてよい。

3　外接円の半径が 1 である $\triangle$ABC において，$\angle$BAC $= 60^\circ$，$\angle$ ABC $= 45^\circ$ とする。$\angle$BAC の二等分線と，辺 BC との交点を D，$\triangle$ABC の外接円との交点を P とする。また，点 P から直線 AC 上に $\angle$BDP $=$ $\angle$CLP となる点 L をとる。さらに直線 LD と辺 AB との交点を M とし，直線 LM と直線 CP の交点を N とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　線分 BD，線分 CD の長さをそれぞれ求めよ。

(2)　$\angle$CLP，$\angle$BDM をそれぞれ求めよ。

(3)　四角形 MBPN と四角形 AMNC の面積の比を求めよ。

4　n を正の整数とする。赤玉と白玉がそれぞれ n 個ずつ入った 1 つの袋から 1 個の玉を取り出す操作を考える。取り出した玉はもとに戻さず，袋の中が空になるまでこの操作を繰り返す。$i = 1,\ 2,\ \cdots,\ 2n$ として，i 回の操作後に取り出した赤玉と白玉の個数をそれぞれ r_i，w_i とする。また，次の条件を満たす場合の数を a_n とする。

すべての $i = 1,\ 2,\ \cdots,\ 2n$ に対して，$r_i \geqq w_i$

このとき，次の問いに答えよ。

(1)　a_3，a_4，a_5 を求めよ。

(2)　a_n を求めよ。

(3)　${}_{2n}\mathrm{C}_n$ を二項係数とするとき，$\dfrac{1}{2\sqrt{n}} \leqq \dfrac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{4^n} \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$ を示せ。

(4)　N を正の整数とするとき，$\dfrac{N}{2(N+1)} \leqq \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \dfrac{a_n}{4^n\sqrt{n}} \leqq \dfrac{N}{\sqrt{2}(N+1)}$ を示せ。

2025年度　旭川医科大学（前期）

医学部 （略解）

証明，図示などは省略

1

（1）　x はすべての実数，y は 2 以上のすべての実数

（2）　$y=\sqrt{x^2+4}$

（3）　$S=2T$

（4）　$V=\dfrac{8(b-2)}{3}\pi$

2

（1）　$\dfrac{2}{3}\pi a^2|b-c|$

（2）　(i) 証明は省略　　(ii) 証明は省略

3

（1）　$\mathrm{BD}=1$，$\mathrm{CD}=\sqrt{3}-1$

（2）　$\angle\mathrm{CLP}=75^\circ$，$\angle\mathrm{BDM}=30^\circ$

（3）　（四角形 MBPN）:（四角形 AMNC）$=1:2$

4

（1）　$a_3=5$，$a_4=14$，$a_5=42$

（2）　$a_n=\dfrac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n+1}$

（3）　証明は省略

（4）　証明は省略