2025 年度　日本医科大学（前期）

医学部　試験時間：90 分

全問必答

1　1 から 6 の目をもつ 1 つのさいころがある。i を虚数単位とするとき，複素数平面上の点 z が $z_0 = 1$ から出発して，さいころを 1 回投げるごとに，次の規則に従って動く。

［規則］「4 以下の目が出たら現在の点に対応する複素数に $\sqrt{2}i$ を掛け，5 または 6 の目が出たら $1+i$ で割る。このようにして得られる複素数に対応する点を新たな点 z とする。」

n を 1 以上の整数とし，さいころを n 回投げたとき，4 以下の目が k（$k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n$）回出る確率を $P_{n,\ k}$ とし，この場合の点 z に対応する複素数を $z_{n,\ k}$ と表すとき，以下の空欄に適する 1 以上の整数を求めよ。

(1)　確率 $P_{n,\ k}$ は，二項係数 ${}_n\mathrm{C}_k$ を用いて

$$P_{n,\ k} = {}_n\mathrm{C}_k \frac{\boxed{\text{ア}}^{\,k}}{\boxed{\text{イ}}^{\,n}}$$

と表せる。また複素数 $z_{n,\ k}$ は

$$z_{n,\ k} = \boxed{\text{ウ}}^{\frac{\boxed{\text{エ}}k-n}{\boxed{\text{オ}}}}\left\{\cos\left(\frac{\boxed{\text{カ}}k-n}{\boxed{\text{キ}}}\pi\right)+i\sin\left(\frac{\boxed{\text{カ}}k-n}{\boxed{\text{キ}}}\pi\right)\right\}$$

となる。

(2)　確率 $P_{2025,\ k}$ は $k = \boxed{\text{ク}}$ のとき，最大値をとる。

(3)　複素数 $z_{2025,\ k}$ が純虚数となる k は $\boxed{\text{ケ}}$ 個ある。

2　O を原点とする座標空間において，四面体 OABC は OA $=$ OB $=$ AB $= 1$，AC $= 2$，OC $=$ BC $= \sqrt{3}$ を満たす。$0 < x < 1$ を満たす実数 x に対し，線分 OA を $x:(1-x)$ に内分する点を D とする。点 O から平面 ABC に垂線 OH を下ろす。また，三角形 ABC の内心を I とし，三角形 DHI の面積を S とする。$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおくとき，以下の各問いに答えよ。

(1)　空欄に適する数を求めよ。答えのみでよい。

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \boxed{\text{ア}},\quad \vec{b}\cdot\vec{c} = \boxed{\text{イ}},\quad \vec{c}\cdot\vec{a} = \boxed{\text{ウ}}$$

(2)　空欄に適する数を求めよ。答えのみでよい。

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \boxed{\text{エ}}\,\vec{a} + \boxed{\text{オ}}\,\vec{b} + \boxed{\text{カ}}\,\vec{c}$$

(3)　空欄に適する数を求めよ。答えのみでよい。

$$\overrightarrow{\mathrm{OI}} = \boxed{\text{キ}}\,\vec{a} + \boxed{\text{ク}}\,\vec{b} + \boxed{\text{ケ}}\,\vec{c}$$

(4)　$S = \dfrac{\sqrt{2}}{24}$ のとき，x の値を求めよ。導出過程も記せ。

3　O を原点とする座標空間内において，点 P は xy 平面内の曲線 $x=2y^2$ 上を動き，点 Q は zx 平面内の曲線 $x=2z^2$ 上を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ によって定められる動点 R の集合を S とする。点 A(1，3，4) とするとき，以下の各問いの空欄に適する数値あるいは数式を求めよ。(4) については導出過程も記せ。

(1)　正の定数 k に対して，平面 $x=k$ と S の共通部分は，平面 $x=k$ 内の点 $\left(k,\ \boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イ}}\right)$ を中心とし，半径 $\boxed{\text{ウ}}$ の円となる。

(2)　点 A から x 軸に下した垂線を AH とするとき，線分 AH の長さは $\boxed{\text{エ}}$ となる。

(3)　点 A を平面 $x=1$ 内の点 (1，0，0) を中心として x 軸の周りに回転して xy 平面上に移す。このような点のうちで y 座標が正となるものを B とすると，点 B の座標は $\left(\boxed{\text{オ}},\ \boxed{\text{カ}},\ \boxed{\text{キ}}\right)$ となる。

(4)　集合 S 上で点 X を動かすとき，$|\overrightarrow{\mathrm{AX}}|$ は X の座標が $\left(\boxed{\text{ク}},\ \boxed{\text{ケ}},\ \boxed{\text{コ}}\right)$ のとき，最小値 $\boxed{\text{サ}}$ をとる。

4　以下の各問いに答えよ。

(1)　全ての実数 x に対して定義された関数 $a(x)$ に対して，関数 $b(x)$，$c(x)$ を次で定める。

$$b(x)=\frac{1}{2}\{a(x)+a(-x)\},\qquad c(x)=\frac{1}{2}\{a(x)-a(-x)\}$$

このとき，$b(x)$ は x の偶関数，$c(x)$ は x の奇関数，となることをそれぞれ示せ。

(2)　全ての実数 x に対して定義された連続関数 $f(x)$ は次の条件 (a)，(b) を満たすものとする。

(a) $f(0)=2$,

(b) $f(x+h)+\displaystyle\int_x^{x+h} g(t)f(t)\,dt=f(x)$ が全ての実数 x, h に対して成り立つ。

ただし，$g(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}+\dfrac{\sin x}{3+\cos x}$ である。

このとき，以下の (i)〜(iii) の各問いに答えよ。

(i)　関数 $f(x)$ は微分可能であることを示し，$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を，$f(x)$ と $g(x)$ を用いて表せ。

(ii)　(b) で与えた関数 $g(x)$ の原始関数 $G(x)$ で $G(0)=0$ を満たすものを求めよ。答えのみでよい。

(iii)　(ii)の $G(x)$ に対して関数 $h(x)$ を $h(x)=e^{G(x)}f(x)$ で定めるとき，$h(x)$ の導関数 $h'(x)$ を計算することにより $f(x)$ を求めよ。

(3)　(2) で求めた関数 $f(x)$ に対して，次の定積分の値を求めよ。

$$I=\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

2025 年度　日本医科大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

(1)　**ア**：2　**イ**：3　**ウ**：2　**エ**：2　**オ**：2　**カ**：3　**キ**：4

(2)　**ク**：1350

(3)　**ケ**：507

2

(1)　**ア**：$\frac{1}{2}$　**イ**：$\frac{1}{2}$　**ウ**：0

(2)　**エ**：$\frac{1}{2}$　**オ**：$\frac{1}{3}$　**カ**：$\frac{1}{6}$

(3)　**キ**：$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$　**ク**：$\frac{3-\sqrt{3}}{3}$　**ケ**：$\frac{3-\sqrt{3}}{6}$

(4)　$x=\frac{2-\sqrt{3}}{4}$

3

(1)　**ア**：0　**イ**：0　**ウ**：$\sqrt{\frac{k}{2}}$

(2)　**エ**：5

(3)　**オ**：1　**カ**：5　**キ**：0

(4)　**ク**：2　**ケ**：$\frac{3}{5}$　**コ**：$\frac{4}{5}$　**サ**：$\sqrt{17}$

4

(1)　証明は省略

(2) (i)　証明は省略，$f'(x)=-f(x)g(x)$

(ii)　$G(x)=\log\frac{2(1+e^x)}{3+\cos x}$

(iii)　$f(x)=\frac{3+\cos x}{1+e^x}$

(3)　$I=3\pi$