2025年度　新潟大学（前期）

医学部　試験時間：90 分

全問必答

1　2 次方程式 $x^2-x-1=0$ の解 $\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ に対して, 数列 $\{a_n\}$ を $a_n=\alpha^{n-1}+\beta^{n-1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ により定める。次の問いに答えよ。

(1)　a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 を求めよ。

(2)　自然数 n に対して, $\alpha^{n+1}-\alpha^n=\alpha^{n-1}$, $\beta^{n+1}-\beta^n=\beta^{n-1}$ が成り立つことを示せ。

(3)　数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とする。すなわち,

$$b_n=a_{n+1}-a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

である。b_1 を求めよ。また, $n\geqq 2$ に対して, $b_n=a_{n-1}$ が成り立つことを示せ。

(4)　自然数 n に対して, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=a_{n+2}-1$ が成り立つことを示せ。

(5)　自然数 n に対して, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}{a_k}^2=a_na_{n+1}+2$ が成り立つことを示せ。

2　2 つの関数 $f(x)=\log_2 x$, $g(x)=|x^2-2x-3|-|x^2-x|$ について, それらの合成関数 $h(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x))$ を考える。次の問いに答えよ。

(1)　$\dfrac{1}{16}\leqq x\leqq 4$ のとき, $f(x)$ のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　$\dfrac{1}{16}\leqq x\leqq 4$ のとき, $h(x)$ のとりうる値の範囲を求めよ。

(3)　関数 $y=h(x)\left(\dfrac{1}{16}\leqq x\leqq 4\right)$ のグラフと直線 $y=1$ の共有点の個数を求めよ。また, 共有点の x 座標をすべて求めよ。

(4)　a は定数とする。関数 $y=h(x)\left(\dfrac{1}{16}\leqq x\leqq 4\right)$ のグラフと直線 $y=a$ が共有点をもつとき, その共有点の個数を a の値によって場合分けして求めよ。

3　次の条件 $(\star)$ を満たす複素数 z を考える。ただし, i は虚数単位とする。

$(\star)$ iz^2 は実数であって, $0\leqq iz^2\leqq 2$ である。

次の問いに答えよ。

(1)　$iz^2=2$ であるときの複素数 z をすべて求めよ。

(2)　$0<iz^2\leqq 2$ であるときの複素数 z の偏角 θ をすべて求めよ。ただし, $0\leqq\theta<2\pi$ とする。

(3)　条件 $(\star)$ を満たす複素数 z 全体の集合を S とする。集合 S を複素数平面上に図示せよ。

(4)　複素数 z が (3) の S を動くとき, $\dfrac{z}{z+2}$ の実部の最小値を求めよ。

4　座標平面上の曲線 $y = x\sin^2 x$ を C とする。自然数 n に対して，曲線 C 上に点 $\mathrm{P}_n(n\pi,\ 0)$，点 $\mathrm{Q}_n\left(\dfrac{2n-1}{2}\pi,\ \dfrac{2n-1}{2}\pi\right)$ をとる。次の問いに答えよ。

(1)　曲線 C 上の点 P_n における接線の方程式を求めよ。また，曲線 C 上の点 Q_n における接線の方程式を求めよ。

(2)　曲線 C と線分 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$ で囲まれる部分の面積 S_n を n を用いて表せ。

(3)　曲線 C と線分 $\mathrm{Q}_n\mathrm{Q}_{n+1}$ で囲まれる部分の面積 T_n を n を用いて表せ。

(4)　S_n と T_n は，(2) と (3) で求めたものとする。極限値

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\sum_{n=1}^{k} S_n}{\sum_{n=1}^{k} T_n}$$

を求めよ。

2025 年度　新潟大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

(1)　$a_1 = 2,\ a_2 = 1,\ a_3 = 3,\ a_4 = 4,\ a_5 = 7$

(2)　証明は省略

(3)　$b_1 = -1$，証明は省略

(4)　証明は省略

(5)　証明は省略

2

(1)　$-4 \leqq f(x) \leqq 2$

(2)　$-2 \leqq h(x) \leqq 4$

(3)　共有点の個数は 3 個，$x = \dfrac{1}{16},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}},\ 4$

(4)　$\begin{cases} a = -2,\ 4 \text{ のとき，} & 1 \text{ 個} \\ -2 < a < 1,\ 1 < a < 4 \text{ のとき，} & 2 \text{ 個} \\ a = 1 \text{ のとき，} & 3 \text{ 個} \end{cases}$

3

(1)　$z = -1 + i,\ 1 - i$

(2)　$\theta = \dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{7}{4}\pi$

(3)　図示は省略

(4)　$\dfrac{1 - \sqrt{2}}{2}$

4

(1)　P_n における接線の方程式：$y = 0$，Q_n における接線の方程式：$y = x$

(2)　$S_n = \dfrac{2n+1}{4}\pi^2$

(3)　$T_n = \dfrac{n}{2}\pi^2$

(4)　1