2025 年度　山梨大学（後期）

医学部　試験時間：90 分

全問必答

1　次の問題文の空欄 $\boxed{\text{ア}}$ から $\boxed{\text{コ}}$ にあてはまるものを解答欄に記入せよ。

(1) 放物線 $2y^2+3y+4x-6=0$ の焦点の座標は $\boxed{\text{ア}}$ であり，準線の方程式は $\boxed{\text{イ}}$ である。

(2) 正三角形 ABC と，辺 BC を $t:(1-t)$ $(0<t<1)$ に内分する点 P がある。正三角形 ABC の外接円と直線 AP の交点のうち，A と異なる点を Q とし，$k=\dfrac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{AP}}$ とする。$t=\dfrac{1}{2}$ のとき，$k=\boxed{\text{ウ}}$ であり，$t=\dfrac{1}{3}$ のとき，$k=\boxed{\text{エ}}$ である。

(3) $0<p<1$ とする。$S_n(p)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(1-p)^{k-2}p$，$T_n(p)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2(1-p)^{k-2}p$ とおく。このとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n(p)=\boxed{\text{オ}}$ であり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}T_n\left(\frac{1}{4}\right)=\boxed{\text{カ}}$ である。ただし，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n(1-p)^n=0$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^2(1-p)^n=0$ であることを使ってもよい。

(4) b を $b>1$ を満たす実数とし，$f(x)=2\log_b\left|\sqrt{2}\cos\dfrac{x}{2}\right|+2\log_b|1-\cos x|+3\log_b 6$ とする。このとき，関数 $f(x)$ が $x=a$ で最大値 2 をとるならば $\cos a=\boxed{\text{キ}}$ であり，$b=\boxed{\text{ク}}$ となる。

(5) $P_0(x)=1$，$P_1(x)=x$ とし，$k=2,\ 3$ に対して $P_k(x)$ を x^k の項の係数が 1 であるような k 次関数とする。$I_{m,n}=\displaystyle\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)\,dx$ とおく。$I_{2,0}=I_{2,1}=I_{3,0}=I_{3,1}=I_{3,2}=0$ であるとき，$P_2(x)=\boxed{\text{ケ}}$ であり，$P_3(x)=\boxed{\text{コ}}$ である。

2　連続する n 日間の日程に対して散歩する日と散歩しない日を設定した予定表を作る。2 日以上連続で散歩しない日は設定せず，1 日目は必ずしも散歩する日とは限らないが，n 日目は必ず散歩する日とする。このような予定表の作り方の総数を f_n とおく。例えば，$f_1=1$，$f_2=2$，$f_3=3$ である。4 以上の自然数 n に対して，f_n 通りの予定表のうち 1 つを選んだとき，4 日目が散歩する日であるような予定表を選ぶ確率を p_n とする。ただし，f_n 通りの予定表はいずれも等しい確率 $\dfrac{1}{f_n}$ で選ばれるとする。

(1) p_{12} を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}p_n$ を求めよ。また，その極限値は 0.7 より大きいか調べよ。ただし，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{f_{n+1}}{f_n}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ を使ってもよい。

3　座標平面上に，楕円 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a,\ b>0)$ がある。次の問いに答えよ。

(1) 点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ を通る傾き k の直線 ℓ を考える。$p^2\neq a^2$ であり，かつ ℓ が E の接線であるとき，k が満たす k についての 2 次方程式を求めよ。

(2) 条件「点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ から E へ互いに直交する 2 本の接線が引ける」を満たす点 P の軌跡を求めよ。

4　$f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　関数 $y=f(x)$ の増減，極値およびグラフの凹凸，変曲点，漸近線を調べよ。

(2)　$\dfrac{1}{2}<a<1$ を満たす実数 a に対して，$S(a)=\displaystyle\int_0^1 |\,f(x)-ax\,|\,dx$ の最小値とそのときの a の値を求めよ。

2025 年度　山梨大学（後期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

(1)　ア：$\left(\dfrac{41}{32},\ -\dfrac{3}{4}\right)$　イ：$y=\dfrac{73}{32}$

(2)　ウ：$\dfrac{4}{3}$　エ：$\dfrac{9}{7}$

(3)　オ：$\dfrac{1}{p(1-p)}$　カ：$\dfrac{112}{3}$

(4)　キ：$-\dfrac{1}{3}$　ク：16

(5)　ケ：$x^2-x+\dfrac{1}{6}$　コ：$x^3-\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{3}{5}x-\dfrac{1}{20}$

2

(1)　$\dfrac{170}{233}$

(2)　$\dfrac{35-15\sqrt{5}}{2}$

3

(1)　$(p^2-a^2)k^2-2pqk+q^2-b^2=0$

(2)　円：$p^2+q^2=a^2+b^2$（$p^2 \fallingdotseq a^2$），ただし，4 点（$\pm a$，$\pm b$）（複号任意）を除く

4

(1)　極大値：$\dfrac{1}{2}$（$x=1$），極小値：$\dfrac{1}{2}$（$x=-1$）

変曲点：$(0,\ 0)$，$\left(\pm\sqrt{3},\ \pm\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$（複号同順）

漸近線：x 軸

(2)　最小値：$\log 3-\dfrac{3}{2}\log 2\left(x=\dfrac{2}{3}\right)$