2025 年度　大阪大学（前期）

医学部　試験時間：150 分

全問必答

1　平面上の三角形 OAB を考える。∠AOB は鋭角，OA $=3$，OB $=t$ とする。また点 A から直線 OB に下ろした垂線と直線 OB の交点を C とし，OC $=1$ とする。線分 AB を $2:1$ に内分する点を P，点 A から直線 OP に下ろした垂線と直線 OB との交点を R とする。

(1)　内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を t を用いて表せ。

(2)　線分 OR の長さを t を用いて表せ。

(3)　線分 OB の中点を M とする。点 R が線分 MB 上にあるとき，t のとりうる値の範囲を求めよ。

2　p と m を実数とし，関数 $f(x)=x^3+3px^2+3mx$ は $x=\alpha$ で極大値をとり，$x=\beta$ で極小値をとるとする。

(1)　$f(\alpha)-f(\beta)$ を p と m を用いて表せ。

(2)　p と m が $f(\alpha)-f(\beta)=4$ を満たしながら動くとき，曲線 $y=f(x)$ の変曲点の軌跡を求めよ。

3　座標空間に 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}(0,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{P}(x,\ y,\ 0)$ がある。$\angle\mathrm{OAP}=30^\circ$ かつ $y\geqq 0$ を満たすように点 P が動くとき，$(x+1)(y+1)$ の最大値と最小値を求めよ。

4　次の問いに答えよ。

(1)　$t>0$ のとき

$$-\frac{1}{t}<\int_t^{2t}\frac{\sin x}{x^2}\,dx<\frac{1}{t}$$

が成り立つことを示せ。

(2)　$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\int_t^{2t}\frac{\cos x}{x}\,dx=0$ を示せ。

(3)　$f(x)=\sin\left(\dfrac{3x}{2}\right)\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$ とおく。

$$\lim_{t\to\infty}\int_1^t\frac{f(x)}{x}\,dx=\frac{1}{2}\int_1^2\frac{\cos x}{x}\,dx$$

を示せ。

5　投げたときに表と裏の出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ のコインがある。A，B，C の 3 文字を BAC のように 1 個ずつすべて並べて得られる文字列に対して，コインを投げて次の操作を行う。

- 表が出たら文字列の左から 1 文字目と 2 文字目を入れかえる。
- 裏が出たら文字列の左から 2 文字目と 3 文字目を入れかえる。

例えば，文字列が BAC であるときに，2 回続けてコインを投げて表，裏の順に出たとすると，文字列は BAC から ABC を経て ACB となる。

最初の文字列は ABC であるとする。コインを n 回続けて投げたあとの文字列が ABC である確率を p_n とし，BCA である確率を q_n とする。

(1)　k を正の整数とするとき，$p_{2k} - q_{2k}$ を求めよ。

(2)　n を正の整数とするとき，p_n を求めよ。

2025年度　大阪大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

（1）t

（2）$\dfrac{2t+9}{2t+1}$

（3）$\dfrac{1+\sqrt{73}}{4} \leqq t \leqq \dfrac{3+3\sqrt{17}}{4}$

2

（1）$4\left(p^2-m\right)^{\frac{3}{2}}$

（2）$y=x^3-3x$

3

最大値：$\dfrac{9}{4}$，最小値：$1-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

4

（1）証明は省略

（2）証明は省略

（3）証明は省略

5

（1）$\left(\dfrac{1}{4}\right)^k$

（2）$p_n=\begin{cases} 0 & (n\ \text{が奇数のとき}) \\ \dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n & (n\ \text{が偶数のとき}) \end{cases}$