2025 年度　北海道大学（前期）

医学部　試験時間：120 分

全問必答

1　α，r を $\alpha>1$，$r>1$ を満たす実数とする。数列 $\{a_n\}$ を $a_1=\alpha$ で公比が r の等比数列とする。数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n=\log_{a_n}(a_{n+1})\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で定める。

(1)　b_n を n と $\log_\alpha r$ を用いて表せ。

(2)　等式

$$b_n=\frac{n+2}{n+1}$$

がすべての自然数 n について成り立つための必要十分条件を r と α を用いて表せ。

(3)　(2) の条件が成り立つとき，積 a_1a_2，$a_1a_2a_3$，$a_1a_2a_3a_4$ の整数部分がそれぞれ 2 桁，3 桁，4 桁になるような α の範囲を求めよ。

2　円 $C_1: x^2+y^2=1$ を考える。実数 p，q が $p^2+q^2>1$ を満たすとき，点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ から C_1 に引いた 2 本の接線 ℓ_1，ℓ_2 の接点をそれぞれ $\mathrm{Q}_1(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{Q}_2(x_2,\ y_2)$ とする。また，座標平面上の原点を $\mathrm{O}(0,\ 0)$ とする。

(1)　直線 ℓ_1，ℓ_2，線分 OQ_1，OQ_2 で囲まれた四角形の面積 S を p，q を用いて表せ。

(2)　点 P が楕円

$$C_2:\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}=1$$

の上を動くとき，(1) の四角形の面積 S の最大値と最小値を求めよ。

3　実数 a および自然数 n に対して，定積分

$$I(a,\ n)=\int_0^{2\pi}e^{ax}\sin(nx)\,dx$$

を考える。ここで e は自然対数の底である。

(1)　$I(a,\ n)$ を求めよ。

(2)　$a_n=\dfrac{\log n}{2\pi}$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ のとき，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}I(a_n,\ n)$ を求めよ。ただし，$\log n$ は n の自然対数である。また，必要ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n}=0$ であることを用いてもよい。

4　a を正の実数とする。

(1)　a が 1 でないとき，複素数 z についての方程式

$$a|z-1| = |(a-2)z+a|$$

を考える。この方程式を満たす z 全体の集合を複素数平面上に図示せよ。

(2)　方程式

$$|z|^2 = 6-a,\ a|z-1| = |(a-2)z+a|$$

をともに満たす複素数 z が存在するような a の範囲を求めよ。

5　n を 3 以上の整数とする。

(1)　k を整数とする。$k < a < b < c \leqq k+n$ を満たす整数 a，b，c の選び方の総数を n の式で表せ。

(2)　$1 \leqq a < b < c \leqq 2n$ を満たす整数 a，b，c のうち，$a+b > c$ となる a，b，c の選び方の総数を L とする。このとき，$L > {}_n\mathrm{C}_3$ であることを示せ。

2025 年度　北海道大学（前期）

医学部 （略解）

証明，図示などは省略

1

(1)　$b_n = \dfrac{n\log_\alpha r + 1}{(n-1)\log_\alpha r + 1}$

(2)　$r = \alpha^{\frac{1}{2}}$

(3)　$10^{\frac{4}{9}} \leqq \alpha < 10^{\frac{4}{7}}$

2

(1)　$S = \sqrt{p^2 + q^2 - 1}$

(2)　最大値：$\sqrt{2}$，最小値：1

3

(1)　$I(a,\ n) = \dfrac{n}{n^2 + a^2}(1 - e^{2a\pi})$

(2)　-1

4

(1)　図示は省略

(2)　$a = 1$，$2 \leqq a \leqq 6$

5

(1)　$\dfrac{1}{6}n(n-1)(n-2)$

(2)　証明は省略