

2025年度 京都府立医科大学（前期）**医学部**

試験時間：120 分

 全問必答**1** 以下の問いに答えよ。(1) 自然数 m に対して、 $2m^2 + 19$ は 5 の倍数でないことを証明せよ。(2) 自然数 m, n, k は等式

$$(E) \quad 14m^2n + 10m^2 + 133n = 70k + 45$$

を満たすとする。このとき、 $(2m^2 + 19)(7n + 5)$ は 70 の倍数であることを証明せよ。(3) $k \leq 50$ のとき、(2) の等式 (E) を満たす自然数の組 (m, n, k) をすべて求めよ。**2** 空間内に同一平面上にない 4 点 A, B, C, D で $|\vec{CA}| = \sqrt{5}$, $|\vec{CB}| = 2$, $\vec{CA} \cdot \vec{CB} = \vec{DA} \cdot \vec{DB}$ および $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = 0$ を満たすものを考える。 $x = |\vec{CD}|$ とおく。(1) $|\vec{DA}|$ と $|\vec{DB}|$ を求めよ。(2) x のとりうる値の範囲を求めよ。(3) $\triangle ACD$ と $\triangle BCD$ の面積の和を S とする。 S を最大にする x の値を求めよ。(4) x は (3) で求めた値とし、線分 AB は 3 点 B, C, D を通る平面に垂直であるとする。このとき四面体 ABCD の体積を求めよ。**3** 自然数 n に対して、関数 $f_n(x)$ ($x > 0$) を次のように定める。

$$f_1(x) = \log(1 + x), \quad f_{n+1}(x) = f_1(f_n(x)) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(1) $x > 0$ のとき、不等式

$$x - \frac{x^2}{2} < f_1(x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

が成り立つことを証明せよ。

(2) 自然数 n に対して

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^2 f_n \left(\frac{1}{x} \right) - x \right) = -\frac{n}{2}$$

が成り立つことを数学的帰納法を用いて証明せよ。

4 $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$ とし, xy 平面上の曲線 $C: y = f(x)$ ($x > 0$) および C 上の点 $P(t, f(t))$ における C の接線 ℓ を考える。

- (1) $x > 0$ において関数 $f(x)$ の極値とグラフの変曲点の座標を求めよ。
- (2) ℓ と C の P 以外の共有点が存在するための t の条件を求め, その共有点の座標を t を用いて表せ。
- (3) ℓ と C で囲まれる部分の面積を $S(t)$ とおく。ただし, P 以外に ℓ と C の共有点が存在しないときは $S(t) = 0$ とする。このとき

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (S(t) - \log t)$$

を求めよ。

2025年度 京都府立医科大学（前期）**医学部**

（略解）

 証明，図示などは省略**1**

- (1) 証明は省略 (2) 証明は省略
(3) $(m, n, k) = (1, 5, 10), (1, 15, 31), (6, 5, 50)$

2

- (1) $|\overrightarrow{DA}| = \sqrt{5}, |\overrightarrow{DB}| = 2$ (2) $0 < x < 4$
(3) $x = \frac{4\sqrt{5}}{3}$ (4) $\frac{8\sqrt{5}}{27}$

3

- (1) 証明は省略 (2) 証明は省略

4

- (1) 極大値： $\frac{1}{4}$ ($x = 2$), 変曲点： $(3, \frac{2}{9})$
(2) $2 < t < 3, 3 < t$
(3) $-\frac{5}{2}$