2025年度　三重大学（前期）

医学部　試験時間：120 分

全問必答

1　以下の問いに答えよ。

(1)　平面上の点 O を中心とする半径 1 の円の周上に，3 点 A，B，C があり，$\overrightarrow{OA}+\sqrt{2}\overrightarrow{OB}+\sqrt{3}\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ を満たすとする。このとき，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$ を求めよ。

(2)　$\tan\dfrac{\pi}{10}\tan\dfrac{2}{5}\pi=1$ を示せ。

(3)　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=3^n+2a_n$ であるとする。数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(4)　$y=a_1x+b_1$ を，2 点 $(1,\ 0)$ および $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ を通る直線の方程式として，$y=a_2x+b_2$ を，2 点 $(-1,\ 0)$ および $\left(-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ を通る直線の方程式とする。連立不等式

$$\begin{cases} x^2+y^2 \leqq 1 \\ y \leqq a_1x+b_1 \\ y \geqq a_2x+b_2 \end{cases}$$

の表す領域を図示せよ。また，点 $(x,\ y)$ がこの領域を動くとき，$x+y$ の最大値と最小値を求めよ。

(5)　$\cos\theta_1-\cos\theta_2=0$ かつ $\sin\theta_1-\sin\theta_2=1$ を満たす組 $(\theta_1,\ \theta_2)$ をすべて求めよ。ただし，$0\leqq\theta_1\leqq\theta_2<2\pi$ とする。また，複素数 z_1，z_2 で $|z_1|+|z_2|=5$，$|z_1z_2|=6$，$z_1|z_2|-|z_1|z_2=|z_1z_2|i$ を満たす組 $(z_1,\ z_2)$ をすべて求めよ。ただし，$|z_1|\leqq|z_2|$，$0\leqq\arg z_1\leqq\arg z_2<2\pi$ とする。

2　k 本中 1 本が当たりで残りがはずれの公平なくじがある。このくじを引いて戻す試行を n 回繰り返す。

(1)　「n 回中当たりを 1 回以上引く確率が a 以上である」という条件を，k，n，a を使った不等式で表せ。さらに，$k=3$，$n=2$，$a=\dfrac{5}{9}$ のとき，その不等式が成り立つことを示せ。

(2)　(1) の不等式を n について解け。ただし，$k>1$ かつ $0\leqq a<1$ とする。

(3)　くじの本数 k が 5 で，a が 0.99 のとき，(1) の不等式を満たすくじ引きの回数 n の最小値を求めよ。ただし，$\log_5 2$ の近似値として 0.43 を使ってよい。

3　以下の問いに答えよ。

(1)　関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\begin{cases} 1-\sqrt{1-(x+1)^2} & (-1 \leqq x < 0) \\ 1-\sqrt{1-(x-1)^2} & (0 \leqq x \leqq 1) \end{cases}$$

とする。曲線 $y=f(x)(-1 \leqq x < 0)$ の凹凸を調べ，そのグラフの概形をかけ。

(2)　不等式 $x^2+y^2+z^2 \leqq 1$ の表す空間内の球を B，連立不等式

$$\begin{cases} y^2+z^2 \leqq \{f(x)\}^2 \\ x \geqq -1 \\ x \leqq 1 \end{cases}$$

の表す空間内の立体を D とする。ただし，$f(x)$ は (1) で与えられるものである。$(x,\ y,\ z)$ が D の点ならば，それは B の点でもあることを示せ。

(3)　B，D は (2) で与えられたものとする。B から D の内部を取り除いてできる立体の体積を求めよ。

2025年度　三重大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

(1)　$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(2)　証明は省略

(3)　$a_n = 3 \cdot 2^{n-1} - 2 \cdot 3^n$

(4)　図示は省略，最大値：$\sqrt{2}$，最小値：$\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$

(5)　$(\theta_1,\ \theta_2) = \left(\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{11}{6}\pi\right),\ \left(\dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{7}{6}\pi\right)$

$(z_1,\ z_2) = \left(\sqrt{3}+i,\ \dfrac{3\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}i\right),\ \left(-\sqrt{3}+i,\ -\dfrac{3\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}i\right)$

2

(1)　$1-\left(\dfrac{k-1}{k}\right)^n \geqq a$，証明は省略

(2)　$n \geqq \log_{\frac{k-1}{k}}(1-a)$

(3)　n の最小値：21

3

(1)　下に凸，図示は省略

(2)　証明は省略

(3)　$\pi(\pi-2)$