# 2024年度　聖マリアンナ医科大学（前期）

## 医学部　試験時間：90 分

全問必答

**1** 以下の (1)〜(3) の $\boxed{\text{ア}}$ 〜 $\boxed{\text{カ}}$ にあてはまる適切な数を解答用紙の所定の欄に記入せよ。

(1) 次の表は 6 人の生徒 A〜F の数学，物理の小テストの得点と 6 人の平均点であるが，D の数学の得点のみ表示されていない。

| | A | B | C | D | E | F | 平均 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 数学 | 8 | 8 | 6 | | 8 | 10 | 7 |
| 物理 | 5 | 7 | 4 | 4 | 4 | 6 | 5 |

D の数学の得点は $\boxed{\text{ア}}$ であり，この 6 人の数学の得点の分散を既約分数で答えると $\boxed{\text{イ}}$ である。また，この 6 人の数学と物理の得点の相関係数は $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{38}$ である。

(2) 3 次方程式 $x^3 + \sqrt[3]{4}x + 4 = 0$ の 3 つの解を $\alpha$，$\beta$，$\gamma$ とするとき，

$$\alpha + \beta + \gamma = \boxed{\text{エ}}$$

$$(10\sqrt[3]{2} - \alpha)(10\sqrt[3]{2} - \beta)(10\sqrt[3]{2} - \gamma) = \boxed{\text{オ}}$$

である。

(3) $a$ を実数とし，$(x - a)^2$ で割り切れる 3 次多項式 $f(x)$ を考える。$f(x)$ の係数がすべて実数で，$x^3$ の項の係数が 1，$f(3) = 3$，$f'(3) = 1$ であるとき，$a$ の値を求めると $a = \boxed{\text{カ}}$ である。

**2**　3 辺の長さが AB $=2$，BC $=3$，AC $=t$（$1<t<5$）である △ABC の辺 AC 上に点 D をとる。また，$\angle \mathrm{ABD}=\alpha$，$\angle \mathrm{CBD}=\beta$，$\angle \mathrm{ADB}=\theta$ とする。
以下の (1)〜(3) の $\boxed{\text{キ}}$ 〜 $\boxed{\text{タ}}$ に当てはまる適切な数または式を解答用紙の所定の欄に記入せよ。

(1)　$\sin\alpha=\sin\beta$ のとき AD $=\boxed{\text{キ}}\,t$ であり，$2\sin\alpha=\sin\beta$ のとき AD $=\boxed{\text{ク}}\,t$ である。

(2)　$2\sin\alpha=\sin\beta$ とする。このとき，△ABD，△CBD に余弦定理をそれぞれ用いて，$\cos\theta$，$\cos(180^\circ-\theta)$ を BD と $t$ を用いた式で表すと

$$\cos\theta=\frac{16\mathrm{BD}^2+\boxed{\text{ケ}}}{8t\mathrm{BD}}$$

$$\cos(180^\circ-\theta)=\frac{16\mathrm{BD}^2+\boxed{\text{コ}}}{24t\mathrm{BD}}$$

である。

(3)　$2\sin\alpha=\sin\beta$ とし，BD $=s$ とおく。$s$ を用いて $t^2$ を表すと $t^2=\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{3}$ である。また $\cos\alpha$ を $s$ を用いて表すと，

$$\cos\alpha=\frac{16s^2+\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}\,s}$$

である。$\cos\alpha$ を $s$ の関数と考えて，その最小値を求めると $\boxed{\text{セ}}$ である。また，$\cos\alpha$ が最小値をとるときの $s$，$t$ の値を求めると $s=\boxed{\text{ソ}}$，$t=\boxed{\text{タ}}$ である。

**3**　$a$ を正の実数，$e$ を自然対数の底，$f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ とし，座標平面上の曲線 $y=f(x)\,(0\leqq x\leqq a)$ を $C_a$ で表す。$C_a$ の長さは

$$L(a)=\int_0^a\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

である。
　また $g(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ とおくとき，

$$f'(x)=g(x),\ g'(x)=f(x),\ \{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2=1$$

が成り立つ。以下の (1)，(2)，(4) の $\boxed{\text{チ}}$ 〜 $\boxed{\text{ト}}$ にあてはまる適切な数，および (3)，(4) に対する解答を解答用紙の所定の欄に記入せよ。

(1)　$\dfrac{g(a)}{L(a)}$ の値は $\boxed{\text{チ}}$ である。

(2)　$L(a)=1$ のとき $f(a)$ の値と $a$ の値を求めると $f(a)=\boxed{\text{ツ}}$，$a=\boxed{\text{テ}}$ である。

(3)　$L(a)=1$ のとき $C_a$ 上に点 $\mathrm{P}_k(x_k,\ f(x_k))$（$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$）をとり，$C_a$ の長さを $n$ 等分する。ただし $n$ は正の整数であり，$0=x_0<x_1<x_2<\cdots\cdots<x_n=a$ とする。このとき

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)=\int_0^1\sqrt{1+t^2}\,dt$$

となることを示せ。

(4)　$t=g(u)$ という置換を用いて，定積分 $\displaystyle\int_0^1\sqrt{1+t^2}\,dt$ を計算すると，その値は $\boxed{\text{ト}}$ である。また解答用紙の所定の欄に $\boxed{\text{ト}}$ の計算過程を記せ。

**4**　以下の (1)〜(3) に対する解答を解答用紙の所定の欄に記入せよ。

(1)　次の $\boxed{\text{ナ}}$，$\boxed{\text{ニ}}$ にあてはまる数を答えよ。
$4n+1$（$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$）で表される自然数を考える。この形の数のうち，小さい方から 5 番目の素数は $\boxed{\text{ナ}}$ で，小さい方から 5 番目の合成数は $\boxed{\text{ニ}}$ である。

(2)　$a$ を自然数とする。$a$ を用いて，次の文中にある $b$ を表せ。
$p_n=an+1$（$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$）とする。どのような自然数 $m$ に対しても，$k=bm+1$ とおくと $p_k=b(am+1)$ となる。
ここで $b$，$am+1$ はともに 1 より大きい自然数なので，$p_k$ は合成数である。

(3)　$c$，$d$，$e$ を自然数として $q_n=cn^2+dn+e$（$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$）とする。$c$，$d$，$e$ がどのような自然数であっても，$q_n$ で表される数の中には合成数となるものがあることを示せ。

# 2024 年度　聖マリアンナ医科大学（後期）

## 医学部　試験時間：90 分

全問必答

**1** 以下の (1)〜(3) の $\boxed{\text{ア}}$ 〜 $\boxed{\text{ケ}}$ にあてはまる適切な数を解答用紙の所定の欄に記入せよ。

(1) 正二十面体の各面は正三角形である。この立体の頂点の個数は $\boxed{\text{ア}}$ 個であり，辺の本数は $\boxed{\text{イ}}$ 本である。

(2) 2 点 $P_0(1,\ 1,\ 2)$, $P_1(-1,\ 0,\ 4)$ を通る直線と平面 $z=0$ の共有点の座標は $\left(\boxed{\text{ウ}},\ \boxed{\text{エ}},\ 0\right)$ である。また原点 O から直線 $P_0P_1$ に下ろした垂線 OH の長さは $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{オ}}}}{3}$ である。

(3) $\theta=\dfrac{3}{10}\pi$ とおく。このとき，$\sin 3\theta+\cos 2\theta=\boxed{\text{カ}}$ となる。

したがって $\sin\theta$ は

$$4\sin^3\theta+\boxed{\text{キ}}\sin^2\theta-\boxed{\text{ク}}\sin\theta-1=0$$

を満たす。これより $\sin\theta$ の値を求めると，$\sin\theta=\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{4}$ となる。

**2**　自然数 $n$ に対して，有理数 $a_n$，$b_n$ を

$$a_n+b_n\sqrt{5}=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdots\cdots (*)$$

を満たすように定める。以下の (1)，(2) に対する解答と (3)，(4) の $\boxed{\text{シ}}$ ～ $\boxed{\text{タ}}$ にあてはまる適切な数を解答用紙の所定の欄に記入せよ。

(1)　二項定理を用いて式 $(*)$ の右辺を展開して，

$$a_n=\sum_{k=0}^{A} {}_n\mathrm{C}_{2k}\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{2k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2k}$$

$$b_n=\sum_{k=0}^{B} {}_n\mathrm{C}_{2k+1}\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{2k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2k}$$

と表すとき，$A=\boxed{\text{コ}}$，$B=\boxed{\text{サ}}$ である。$\boxed{\text{コ}}$，$\boxed{\text{サ}}$ にあてはまるものを，次の選択肢からそれぞれ選び，その記号を答えよ。ただし，実数 $x$ に対して $[x]$ は $x$ を超えない最大の整数を表すものとする。

【選択肢】

ⓐ $\left[\frac{n-1}{2}\right]$　ⓑ $\left[\frac{n}{2}\right]$　ⓒ $\left[\frac{n+1}{2}\right]$　ⓓ $\left[\frac{n}{2}\right]+1$　ⓔ $\left[\frac{n}{2}\right]+2$

(2)　自然数 $n$ に対して，有理数 $c_n$，$d_n$ を

$$c_n+d_n\sqrt{5}=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

を満たすように定める。$c_n$，$d_n$ を $a_n$，$b_n$ を用いてそれぞれ表せ。

(3)　$a_n$，$b_n$ の一般項は

$$a_n=\boxed{\text{シ}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\boxed{\text{ス}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$b_n=\boxed{\text{セ}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\boxed{\text{ソ}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

となる。なお $\boxed{\text{シ}}$ ～ $\boxed{\text{ソ}}$ は $n$ を含まない数である。

(4)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\boxed{\text{タ}}$ である。

**3**　実数の閉区間 $A=[-1,\ 3]$，$B=[-2,\ 1]$ と関数 $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2$ を考える。以下の (1)～(5) の $\boxed{\text{チ}}$ ～ $\boxed{\text{フ}}$ にあてはまる適切な数を解答用紙の所定の欄に記入せよ。

(1)　$f(3)$ の値を求めると $f(3)=\boxed{\text{チ}}$ である。$f(x)$ の $A$ における極大値，最大値，最小値を求めると，極大値は $\boxed{\text{ツ}}$，最大値は $\boxed{\text{テ}}$，最小値は $\boxed{\text{ト}}$ である。

(2)　$y$ に関する条件「$f(x)=y$ を満たす $A\cup B$ の要素 $x$ が存在する」が真となる $y$ の範囲は $\boxed{\text{ナ}}\leqq y\leqq\boxed{\text{ニ}}$ である。

(3)　$y$ に関する条件「$f(x_1)=y$ を満たす $A$ の要素 $x_1$ が存在する，または $f(x_2)=y$ を満たす $B$ の要素 $x_2$ が存在する」が真となる $y$ の範囲は $\boxed{\text{ヌ}}\leqq y\leqq\boxed{\text{ネ}}$ である。

(4)　$y$ に関する条件「$f(x)=y$ を満たす $A\cap B$ の要素 $x$ が存在する」が真となる $y$ の範囲は $\boxed{\text{ノ}}\leqq y\leqq\boxed{\text{ハ}}$ である。

(5)　$y$ に関する条件「$f(x_1)=y$ を満たす $A$ の要素 $x_1$ が存在し，かつ $f(x_2)=y$ を満たす $B$ の要素 $x_2$ が存在する」が真となる $y$ の範囲は $\boxed{\text{ヒ}}\leqq y\leqq\boxed{\text{フ}}$ である。

**4**　$f(x) = x(x-1)(x-3)$ とし，座標平面上の曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = mx$（$m$ は実数）は 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{P}(x_1,\ mx_1)$，$\mathrm{Q}(x_2,\ mx_2)$（$0 < x_1 < x_2$）を共有するものとする。

以下の (1)〜(3) の $\boxed{\text{ヘ}}$ 〜 $\boxed{\text{メ}}$ にあてはまる適切な数および (4) に対する解答を解答用紙の所定の欄に記入せよ。

(1)　$m$ の範囲を求めると $\boxed{\text{ヘ}} < m < \boxed{\text{ホ}}$ である。

(2)　$x_1^2 + x_2^2$，$x_1^3 + x_2^3$，$x_1^4 + x_2^4$ を $m$ を用いた式で表すと，

$$x_1^2 + x_2^2 = \boxed{\text{マ}}\,m + 10$$

$$x_1^3 + x_2^3 = \boxed{\text{ミ}}\,m + 28$$

$$x_1^4 + x_2^4 = 2m^2 + \boxed{\text{ム}}\,m + 82$$

となる。

(3)　線分 OP と曲線 $y = f(x)$ の囲む部分の面積を $S_1$，線分 PQ と曲線 $y = f(x)$ の囲む部分の面積を $S_2$ とするとき，$S_1 : S_2 = 1 : 2$ となるような $m$ の値を求めると $m = \dfrac{\boxed{\text{メ}}}{3}$ である。

(4)　(3) の $m$ の値の計算過程を記せ。

# 2024年度　聖マリアンナ医科大学（前期）

## 医学部　（略解）

証明，図示などは省略

### 1

(1)　ア : 2　イ : $\dfrac{19}{3}$　ウ : $5\sqrt{19}$

(2)　エ : 0　オ : 2024

(3)　カ : 5

### 2

(1)　キ : $\dfrac{2}{5}$　ク : $\dfrac{1}{4}$

(2)　ケ : $t^2-64$　コ : $9t^2-144$

(3)　サ : $-6s^2+84$　シ～ス : $\dfrac{16s^2+27}{48s}$　セ : $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　ソ : $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$　タ : $\sqrt{19}$

### 3

(1)　チ : 1

(2)　ツ : $\sqrt{2}$　テ : $\log(1+\sqrt{2})$

(3)　証明は省略

(4)　$\dfrac{1}{2}\{\sqrt{2}+\log(1+\sqrt{2})\}$

### 4

(1)　ナ : 37　ニ : 45

(2)　$b=a+1$

(3)　証明は省略

# 2024 年度　聖マリアンナ医科大学（後期）

## 医学部　（略解）

証明，図示などは省略

### 1

(1)　ア：12　イ：30

(2)　ウ～エ：(3，2，0)　オ：53

(3)　カ：0　キ～ク：$4\sin^3\theta+2\sin^2\theta-3\sin\theta-1=0$　ケ：$1+\sqrt{5}$

### 2

(1)　コ：ⓑ　サ：ⓐ

(2)　$c_n=a_n$，$d_n=-b_n$

(3)　シ：$\dfrac{1}{2}$　ス：$\dfrac{1}{2}$　セ：$\dfrac{1}{2\sqrt{5}}$　ソ：$\dfrac{1}{2\sqrt{5}}$

(4)　タ：$\sqrt{5}$

### 3

(1)　チ：27　ツ：0　テ：27　ト：$-32$

(2)　ナ～ニ：$-32\leqq y\leqq 32$

(3)　ヌ～ネ：$-32\leqq y\leqq 32$

(4)　ノ～ハ：$-13\leqq y\leqq 0$

(5)　ヒ～フ：$-13\leqq y\leqq 27$

### 4

(1)　ヘ～ホ：$-1<m<3$

(2)　マ：2　ミ：12　ム：52

(3)　メ：$-15+8\sqrt{3}$

(4)　計算過程は省略