2024 年度　東京大学（前期）

医学部　試験時間：150 分

全問必答

1　座標空間内の点 A(0, −1, 1) をとる。xy 平面上の点 P が次の条件 (i), (ii), (iii) をすべて満たすとする。

(i)　P は原点 O と異なる。

(ii)　$\angle \mathrm{AOP} \geqq \dfrac{2}{3}\pi$

(iii)　$\angle \mathrm{OAP} \leqq \dfrac{\pi}{6}$

P がとりうる範囲を xy 平面上に図示せよ。

2　次の関数 $f(x)$ を考える。

$$f(x) = \int_0^1 \frac{|t-x|}{1+t^2}\,dt \qquad (0 \leqq x \leqq 1)$$

(1)　$0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$ を満たす実数 α で，$f'(\tan\alpha)=0$ となるものを求めよ。

(2)　(1) で求めた α に対し，$\tan\alpha$ の値を求めよ。

(3)　関数 $f(x)$ の区間 $0 \leqq x \leqq 1$ における最大値と最小値を求めよ。必要ならば，$0.69<\log 2<0.7$ であることを用いてよい。

3　座標平面上を次の規則 (i), (ii) に従って 1 秒ごとに動く点 P を考える。

(i)　最初に，P は点 (2, 1) にいる。

(ii)　ある時刻で P が点 $(a,\ b)$ にいるとき，その 1 秒後には P は

- 確率 $\dfrac{1}{3}$ で x 軸に関して $(a,\ b)$ と対称な点
- 確率 $\dfrac{1}{3}$ で y 軸に関して $(a,\ b)$ と対称な点
- 確率 $\dfrac{1}{6}$ で直線 $y=x$ 軸に関して $(a,\ b)$ と対称な点
- 確率 $\dfrac{1}{6}$ で直線 $y=-x$ 軸に関して $(a,\ b)$ と対称な点

にいる。

以下の問いに答えよ。ただし，(1) については，結論のみを書けばよい。

(1)　P がとりうる点の座標をすべて求めよ。

(2)　n を正の整数とする。最初から n 秒後に P が点 (2, 1) にいる確率と，最初から n 秒後に P が点 (−2, −1) にいる確率は等しいことを示せ。

(3)　n を正の整数とする。最初から n 秒後に P が点 (2, 1) にいる確率を求めよ。

4　$f(x)=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}x^2+4\sqrt{2}$ とおく。$0<t<4$ を満たす実数 t に対し，座標平面上の点 $(t,\ f(t))$ を通り，この点において放物線 $y=f(x)$ と共通の接線を持ち，x 軸上に中心を持つ円を C_t とする。

(1)　円 C_t の中心の座標を $(c(t),\ 0)$，半径を $r(t)$ とおく。$c(t)$ と $\{r(t)\}^2$ を t の整式で表せ。

(2)　実数 a は $0<a<f(3)$ を満たすとする。円 C_t が点 $(3,\ a)$ を通るような実数 t は $0<t<4$ の範囲にいくつあるか。

5　座標空間内に 3 点 $\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ 1)$ をとり，D を線分 AC の中点とする。三角形 ABD の周および内部を x 軸のまわりに 1 回転させて得られる立体の体積を求めよ。

6　2 以上の整数で，1 とそれ自身以外に正の約数を持たない数を素数という。以下の問いに答えよ。

(1)　$f(x)=x^3+10x^2+20x$ とする。$f(n)$ が素数となるような整数 n をすべて求めよ。

(2)　a，b を整数の定数とし，$g(x)=x^3+ax^2+bx$ とする。$g(n)$ が素数となるような整数 n の個数は 3 個以下であることを示せ。

2024 年度　東京大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

図示は省略

2

(1)　$\alpha = \dfrac{\pi}{8}$　　(2)　$\tan\alpha = \sqrt{2} - 1$

(3)　最大値：$\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\log 2$，最小値：$\log\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$

3

(1)　(2，1)，(1，2)，(−1，2)，(−2，1)，(−2，−1)，(−1，−2)，(1，−2)，(2，−1)

(2)　証明は省略

(3)　n が偶数のとき：$\dfrac{1}{4}\left\{1 + \left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right\}$，$n$ が奇数のとき：0

4

(1)　$c(t) = \dfrac{1}{4}t^3 - 3t$，$\{r(t)\}^2 = \dfrac{1}{16}(t^2+2)(t+4)^2(t-4)^2$

(2)
$$\begin{cases} 0<a<\sqrt{5} \text{ のとき} & 1\text{ 個} \\ a = \sqrt{5} \text{ のとき} & 2\text{ 個} \\ \sqrt{5}<a<\dfrac{7\sqrt{2}}{4} \text{ のとき} & 3\text{ 個} \end{cases}$$

5　$\dfrac{\pi}{9}$

6

(1)　$n = 1,\ -3,\ -7$　　(2)　証明は省略