2024 年度　東京医科歯科大学（前期）

医学部　試験時間：90 分

全問必答

1　n を 2 以上の自然数とする。自然数の組 $(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$ を解とする方程式

$$(*)\quad a_1+a_2+\cdots+a_n=a_1\times a_2\times\cdots\times a_n$$

を考えるとき，以下の各問いに答えよ。

(1)　$n=3$ のとき，$(*)$ の解 $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ のうち，$a_1\leqq a_2\leqq a_3$ を満たすものをすべて求めよ。

(2)　$n\geqq 3$ のとき，$(*)$ の任意の解 $(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$ において，$a_i=1$ となる i が少なくとも 1 つ存在することを示せ。

(3)　$(*)$ のある解 $(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$ において，$a_i=1$ となる i がちょうど 2 個存在しているとする。このとき，n の取り得る値をすべて求めよ。

2　xyz 空間において，点 $\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{C}(-1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{D}(0,\ 0,\ 1)$ をとり，線分 CD の中点を M とする。さらに，N を線分 BD 上の点とする。また，z 軸と平行でない直線上の異なる 2 点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$，$\mathrm{Q}(x',\ y',\ z')$ に対して，

$$\frac{z'-z}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2}}$$

をベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ の勾配と呼ぶ。$\overrightarrow{\mathrm{AN}}$ の勾配を t_1，$\overrightarrow{\mathrm{NM}}$ の勾配を t_2 とするとき，以下の各問いに答えよ。

(1)　$t_2=0$ となるように N をとったとき，t_1 の値を求めよ。

(2)　$l=|\overrightarrow{\mathrm{AN}}|+|\overrightarrow{\mathrm{NM}}|$ とし，l が最小となるように N をとったとき，l の値を求めよ。

(3)　$0\leqq t_2\leqq t_1$ となるように N をとったとき，N の y 座標を s とする。s がとり得る値の範囲を求めよ。

3　$f(x)$ を連続関数とするとき，次の各問いに答えよ。

(1)　次の等式を示せ。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x)\sin x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x)\cos x\,dx$$

(2)　次の等式を示せ。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x)(\sin x+\cos x)\,dx=\int_{-1}^{1} f(1-t^2)\,dt$$

(3)　次の定積分の値を求めよ。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sqrt{\sin 2x}}\,dx$$

2024 年度　東京医科歯科大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

(1)　$(a_1,\ a_2,\ a_3)=(1,\ 2,\ 3)$　　(2)　証明は省略

(3)　$n=4,\ 5$

2

(1)　$t_1=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$　　(2)　$l=\dfrac{\sqrt{14}}{2}$　　(3)　$\dfrac{1}{2}\leqq s\leqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

3

(1)　証明は省略　　(2)　証明は省略　　(3)　$\dfrac{\pi}{2}-1$