2024 年度　旭川医科大学（前期）

医学部　試験時間：120 分

全問必答

1　K を正の実数とし，

$$f(x)=\log\left(1+\frac{x^2}{K^2}\right)$$

とする。ただし，$\log x$ $(x>0)$ は自然対数を表す。また，曲線 $y=f(x)$ の変曲点の y 座標を b として，

$$g(x)=b-\sqrt{b^2-x^2}$$

とする。曲線 $y=g(x)$ は，円 $x^2+(y-b)^2=b^2$ の下半円である。

$H(x)=f(x)-g(x)$ とするとき，次の問いに答えよ。ただし，自然対数の底 e について，必要ならば $2<e<3$ を用いてもよい。

(1)　b の値を求めよ。

(2)　$K=1$ とするとき，$H(x)$ が $x=0$ において極大値をとるか，極小値をとるかを判定せよ。

(3)　$|x|\leqq b$ において，K の値により，次の (A)，(B)，(C) のいずれかが成り立つ。

(A)　$H(x)\geqq 0$ である

(B)　$H(x)$ は正の値も負の値もとる

(C)　$H(x)\leqq 0$ である

(A)，(B)，(C) のそれぞれが成り立つときの K の値の範囲を求めよ。

2　$p>1$ とし，$x>0$ の自然対数 $\log x$ と x^p の商として定義される関数

$$f(x)=\frac{\log x}{x^p}$$

を考える。自然対数の底を e として，次の問いに答えよ。

(1)　次の極限を調べよ。必要ならば $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$ を用いてもよい。

(i)　$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)$

(ii)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)$

(2)　$y=f(x)$ のグラフの概形をかけ。ただし，変曲点は求めなくてよい。また，n を正の整数とするとき，$x\geqq\dfrac{1}{e^n}$ において，$f(x)$ のとりうる値の範囲を求めよ。

(3)　座標平面の原点を通る直線 ℓ が曲線 $y=f(x)$ と点 $(a,\ f(a))$ で接しているとき，a を p を用いて表せ。また，ℓ の傾き m を p を用いて表せ。

(4)　曲線 $y=f(x)$ と直線 ℓ および x 軸で囲まれた図形の面積を S とするとき，$(p-1)^2S$ を求めよ。

3　座標平面において 2 点 A$(-1,\ 1)$，B$(1,\ -1)$ および曲線 $xy=1\ (x>0)$ 上を動く点 $\mathrm{P}\left(p,\ \dfrac{1}{p}\right)$ がある。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　△ABP の面積 S を p を用いて表し，S のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　△ABP の外接円の半径 r を S を用いて表せ。

(3)　△ABP の外接円の面積を T とし，$\dfrac{T}{S^2}$ を p の関数とみて，これを $f(p)$ とする。

(i)　$\displaystyle\lim_{p\to\infty} f(p)$ を求めよ。

(ii)　$f(p)$ の最大値，最小値，およびそのときの p の値をそれぞれ求めよ。

4　1，2，3 の数字が書かれたカードが 1 枚ずつ 1 つの箱に入っている。その箱からカードを 1 枚取り出し，数字を確認した後，箱に戻すという試行を繰り返す。n を正の整数とし，n 回の試行後にそれまでに取り出したカードの数字の和が初めて 3 の倍数になる確率を p_n とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　p_1，p_2，p_3 を求めよ。

(2)　p_n を求めよ。

(3)　N を正の整数として $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} n^2 p_n$ を求めよ。

(4)　無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 p_n$ の和を求めよ。ただし，必要ならば $|r|<1$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2 r^n = 0$ が成り立つことを用いてもよい。

2024 年度　旭川医科大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

(1)　$b = \log 2$

(2)　極小値をとる

(3)　(A)　$0 < K \leqq \log 2$
　　(B)　$\log 2 < K < \sqrt{\log 4}$
　　(C)　$K \geqq \sqrt{\log 4}$

2

(1)　(i)　$-\infty$，(ii)　0

(2)　図示は省略，$-ne^{np} \leqq f(x) \leqq \dfrac{1}{pe}$

(3)　$a = e^{\frac{1}{p+1}}$，$m = \dfrac{1}{(p+1)e}$

(4)　$\dfrac{1+p}{2}e^{\frac{1-p}{1+p}} - 1$

3

(1)　$S = p + \dfrac{1}{p}$，$S \geqq 2$

(2)　$r = \sqrt{\dfrac{S^4 - 4S^2 + 16}{2S^2}}$

(3)　(i)　$\dfrac{\pi}{2}$，(ii)　$\begin{cases} \text{最大値：} p = 1 \text{ のとき} & \dfrac{\pi}{2} \\ \text{最小値：} p = \sqrt{2} \pm 1 \text{ のとき} & \dfrac{3}{8}\pi \end{cases}$

4

(1)　$p_1 = \dfrac{1}{3}$，$p_2 = \dfrac{2}{9}$，$p_3 = \dfrac{4}{27}$

(2)　$p_n = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$

(3)　$15 - (N^2 + 6N + 15)\left(\dfrac{2}{3}\right)^N$

(4)　15