2024年度　新潟大学（前期）

医学部　試験時間：90 分

全問必答

1　座標空間において，3 点 A(1, 0, 0)，B(0, −1, 0)，C(0, 0, −2) の定める平面を α とし，方程式 $x^2+y^2+z^2+2x-10y+4z+21=0$ が表す球面を S とする。次の問いに答えよ。

(1)　球面 S の中心 P の座標と S の半径を求めよ。

(2)　実数 s，t に対して，点 D を $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を満たすようにとる。このとき，D の座標を s，t を用いて表せ。

(3)　点 Q が平面 α 上を動き，点 R が球面 S 上を動くとき，Q と R の距離の最小値を求めよ。また，そのときの Q と R の座標をそれぞれ求めよ。

2　n，k を自然数とする。n 個のボールと k 個の箱がある。各箱は箱 1，箱 2，…，箱 k のように表すものとする。n 個のボールを k 個の箱へ投げ入れる。各ボールはいずれかの箱に入るものとし，どの箱に入る確率も等しいとする。n 個のボールを投げ入れた後，箱 i $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$ に入っているボールの個数を a_i とする。このとき，$a_1+a_2+\cdots+a_k=n$ となる。次の問いに答えよ。

(1)　$n=4$，$k=5$ とする。このとき，$a_1=0$ となる確率を求めよ。

(2)　$k \geqq 2$ とする。このとき，$a_1 \times a_2=0$ となる確率を n，k を用いて表せ。

(3)　$k=4$ とする。このとき，$a_1\times a_2\times a_3\times a_4 \neq 0$ となる確率を p_n とする。p_n の値を n を用いて表せ。

(4)　$k=4$ とし，p_n を (3) で求めたものとする。このとき，$r>0$ で数列 $\{r^n(p_{n+1}-p_n)\}$ が収束するような r の値の範囲を求めよ。

3　a を $0<a<1$ となる実数とする。座標平面上において，長さが 4 の線分 PQ を考える。線分 PQ の端点 P は x 軸上を，端点 Q は y 軸上を動くとき，線分 PQ を $a:(1-a)$ の比に内分する点 R の軌跡は楕円になる。この楕円を C とする。ただし，円は楕円の特別な場合とする。次の問いに答えよ。

(1)　楕円 C の方程式を a を用いて表せ。

(2)　楕円 C で囲まれた部分と連立不等式

$$\begin{cases} x \geqq 0 \\ \sqrt{3}ax \geqq (1-a)y \end{cases}$$

の表す領域の共通部分の面積を S とする。S を a を用いて表せ。

(3)　面積 S の最大値とそのときの a の値を求めよ。

4　実数 t に対して，複素数 z を次の条件 Ⅰ，Ⅱ を満たすようにとる。

Ⅰ　z の虚部は 0 以上である。

Ⅱ　$z^2 - 2t^3 z + t^6 + 9t^2 = 0$

この z に対して，複素数 w を $w = i\overline{z}$ とおく。ただし，i は虚数単位とし，$\overline{z}$ は z の共役複素数とする。次の問いに答えよ。

(1)　複素数 z と w を t を用いて表せ。

(2)　$0 \leqq t \leqq 2$ のとき，$|z - w|$ の最大値を求めよ。また，そのときの t の値をすべて求めよ。

(3)　実数 t を動かしたとき，複素数平面上で z が表す点が描く曲線を C_1 とし，w が表す点が描く曲線を C_2 とする。C_1 と C_2 で囲まれる図形の面積を求めよ。

2024 年度　新潟大学（前期）

医学部 （略解）

証明，図示などは省略

1

(1) $\mathrm{P}(-1,\ 5,\ -2)$，半径：3

(2) $\mathrm{D}(1-s-t,\ -s,\ -2t)$

(3) 最小値：4，$\mathrm{Q}\left(\frac{5}{3},\ \frac{7}{3},\ -\frac{10}{3}\right)$，$\mathrm{R}(1,\ 3,\ -3)$

2

(1) $\frac{256}{625}$

(2) $2\left(\frac{k-1}{k}\right)^n-\left(\frac{k-2}{k}\right)^n$

(3) $p_n=1-\frac{4\cdot 3^n-6\cdot 2^n+4}{4^n}$

(4) $0<r\leqq\frac{4}{3}$

3

(1) $\frac{x^2}{16(1-a^2)}+\frac{y^2}{16a^2}=1$

(2) $S=\frac{20\pi}{3}a(1-a)$

(3) $a=\frac{1}{2}$ のとき，最大値：$\frac{5}{3}\pi$

4

(1) $z=t^3+3|t|i$，$w=3|t|+t^3i$

(2) 最大値：$2\sqrt{2}$，$t=1,\ 2$

(3) $\frac{27}{2}$