

2024 年度 慶應義塾大学（前期）

医学部

試験時間：100 分

📖 全問必答

1 以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。

- (1) 座標平面の 3 点 $O(0, 0)$, $A(3, 0)$, $B(1, \sqrt{3})$ を頂点とする三角形 OAB の外心の座標は $(\boxed{\text{あ}}, \boxed{\text{い}})$ であり、内心の座標は $(\boxed{\text{う}}, \boxed{\text{え}})$ である。
- (2) 座標平面の第 1 象限の点 (X, Y) において楕円 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ と接する直線を l とすると、 l の傾きは $\boxed{\text{お}}$ である。また、原点を O , l と x 軸, y 軸との交点をそれぞれ P, Q とすると、三角形 OPQ の面積は $(X, Y) = (\boxed{\text{か}}, \boxed{\text{き}})$ のときに最小値 $\boxed{\text{く}}$ をとる。
- (3) 関数 $y = \cos x \sin 2x$ $(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$ の最大値は $\boxed{\text{け}}$ である。また、この関数のグラフと x 軸で囲まれてできる図形の面積は $\boxed{\text{こ}}$ である。

2 以下の文章の空欄に適切な数を入れて文章を完成させなさい。

袋が2つ（袋1と袋2）および赤玉2個，白玉4個が用意されている。それぞれの袋に玉が3個ずつ入った状態として，次の3つがあり得る。

状態 A：袋1に入っている赤玉が0個である状態

状態 B：袋1に入っている赤玉が1個である状態

状態 C：袋1に入っている赤玉が2個である状態

上記の各状態に対して，次の2段階からなる操作 T を考える。

操作 T

袋1から玉を1個無作為に取り出し，それを袋2に入れる。次に，袋2から玉を1個無作為に取り出し，それを袋1に入れる。

- (1) X, Y をそれぞれ A, B, C のいずれかとする。状態 X に対し操作 T を1回施した結果，状態 Y になる確率を $P(X \rightarrow Y)$ で表す。このとき

$$P(A \rightarrow A) = \boxed{\text{(あ)}}, \quad P(A \rightarrow B) = \boxed{\text{(い)}}, \quad P(B \rightarrow A) = \boxed{\text{(う)}},$$

$$P(B \rightarrow B) = \boxed{\text{(え)}}, \quad P(C \rightarrow A) = \boxed{\text{(お)}}, \quad P(C \rightarrow B) = \boxed{\text{(か)}}$$

である。

- (2) 以下， n を自然数とし，状態 B から始めて操作 T を繰り返す。操作 T を n 回施し終えたとき，状態 A である確率を a_n ，状態 B である確率を b_n ，状態 C である確率を c_n とする。 $n \geq 2$ とするとき， a_n, b_n と $a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1}$ の間には次の関係式が成り立つ。

$$\begin{cases} a_n = \boxed{\text{(あ)}} a_{n-1} + \boxed{\text{(う)}} b_{n-1} + \boxed{\text{(お)}} c_{n-1} \\ b_n = \boxed{\text{(い)}} a_{n-1} + \boxed{\text{(え)}} b_{n-1} + \boxed{\text{(か)}} c_{n-1} \end{cases}$$

したがって b_n と b_{n-1} の間には次の関係式が成り立つことがわかる。

$$b_n = \boxed{\text{(き)}} b_{n-1} + \boxed{\text{(く)}}$$

これより $n \geq 1$ に対して b_n を n の式で表すと

$$b_n = \boxed{\text{(け)}} + \boxed{\text{(こ)}} \left(\boxed{\text{(き)}} \right)^n$$

となる。さらに $d_n = \frac{a_n}{\left(\boxed{\text{(あ)}} \right)^n}$ とおくととき， d_n を n の式で表すと

$$d_n = \boxed{\text{(し)}} \left\{ \left(\boxed{\text{(す)}} \right)^n - \left(\boxed{\text{(せ)}} \right)^n \right\}$$

となる。

3 以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。また設問(2)に答えなさい。

−1, 0, 1 以外のすべての実数 x に対して定義された関数

$$f(x) = \frac{1}{3x(x^2 - 1)}$$

を考える。

(1) $f(x)$ は $x =$ において極小値 をとり, $x =$ において極大値 をとる。

(2) 曲線 $y = f(x)$ の概形を描きなさい。

(3) 直線 $y = mx$ が曲線 $y = f(x)$ とちょうど 4 点で交わる時, 定数 m の値の範囲は である。

(4) $a =$, $b =$, $c =$ とすると, 次の恒等式が成り立つ。

$$f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+1}$$

(5) 直線 $y = mx$ (ただし $m > 0$) が曲線 $y = f(x)$ と第 1 象限において交わる点 P の x 座標を $x(m)$ とし,

$$A(m) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{x(m)}^T f(x) dx$$

において, $A(m)$ を m の式で表すと, $A(m) =$ となる。また, 原点を O, $(x(m), 0)$ を座標とする点を Q とし, 三角形 OPQ の面積を $B(m)$ とおくと, $\lim_{m \rightarrow +0} \frac{A(m)}{B(m)} =$ となる。

4 以下の文章の空欄に適切な数, 式, または記号を入れて文章を完成させなさい。ただし空欄 (さ), (し), (す) には選択肢より適切な記号を選んで記入すること。

座標空間の4点 $O(0, 0, 0)$, $A(-3, -1, 1)$, $B(2, -2, 2)$, $C(3, 3, 3)$ を頂点とする四面体 $OABC$ の, 平面 $z = t$ による切り口を S_t とする。

(1) S_t は $1 < t < 2$ のとき四角形となり, $t = 1$ および $t = 2$ のとき三角形となる。 $1 < t < 2$ に対して, 以下の条件を満たすように S_t の4つの頂点を W, X, Y, Z と定める。

条件: t を1に限りなく近づけるととき W と X が限りなく近づき, t を2に限りなく近づけるととき W と Y が限りなく近づく。

このとき W, X, Y, Z の座標は

$$W(\text{〔あ〕}, \text{〔い〕}, t), \quad X(\text{〔う〕}, \text{〔え〕}, t),$$

$$Y(\text{〔お〕}, \text{〔か〕}, t), \quad Z(\text{〔き〕}, \text{〔く〕}, t)$$

となる。

(2) $1 \leq t \leq 2$ のとき, S_t の面積を $A(t)$ とすると, $A(t) = \text{〔け〕}$ である。これより四面体 $OABC$ の体積 V を求めると $V = \text{〔こ〕}$ となる。

(3) 点 $D(6, 2, 4)$ を追加すると, 5点 O, A, B, C, D は6つの三角形 $OAB, OBC, OAC, \text{〔さ〕}, \text{〔し〕}, \text{〔す〕}$ を面とする六面体の頂点である。3点 A, B, C を通る平面 α と線分 OD との交点を E とするとき, $\vec{AE} = u\vec{AB} + v\vec{AC}$ が成り立つように u, v を定めると $u = \text{〔せ〕}, v = \text{〔そ〕}$ である。したがって $u + v > 1$ となるので, 点 E はこの六面体の外にある。

選択肢 ABC, ABD, ACD, BCD, OAD, OBD, OCD

(4) $1 < t < 2$ に対して, (3) の六面体を平面 $z = t$ で切った切り口の面積を $U(t)$ とすると, $U(t)$ は $t = \text{〔た〕}$ (ただし $1 < \text{〔た〕} < 2$) において最大値 〔ち〕 をとる。

2024 年度 慶應義塾大学 (前期)

医学部

(略解)

☞ 証明, 図示などは省略

1

(1) あ: $\frac{3}{2}$ い: $\frac{\sqrt{3}}{6}$ う: $\frac{5-\sqrt{7}}{2}$ え: $\frac{\sqrt{3}(5-\sqrt{7})}{6}$

(2) お: $-\frac{2X}{3Y}$ か: $\frac{\sqrt{6}}{2}$ き: 1 く: $\sqrt{6}$

(3) け: $\frac{4\sqrt{3}}{9}$ こ: $\frac{2}{3}$

2

(1) あ: $\frac{1}{2}$ い: $\frac{1}{2}$ う: $\frac{1}{6}$ え: $\frac{2}{3}$ お: 0 か: $\frac{1}{2}$

(2) き~く: $\frac{1}{6}b_{n-1} + \frac{1}{2}$ け~さ: $\frac{3}{5} + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n$ し~せ: $\frac{1}{5}\left\{2^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$

3

(1) あ: $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ い: $\frac{\sqrt{3}}{2}$ う: $\frac{1}{\sqrt{3}}$ え: $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) 図示は省略

(3) お: $m < -\frac{4}{3}$

(4) か: $\frac{1}{6}$ き: $-\frac{1}{3}$ く: $\frac{1}{6}$

(5) け: $\frac{1}{6} \log \frac{3m+2+\sqrt{9m^2+12m}}{2}$ こ: 1

4

(1) あ~い: $(5t-8, -t, t)$ う~え: $(3t-6, 2t-3, t)$ お~か: $(t, -t, t)$ き~く: (t, t, t)

(2) け: $-8t^2 + 24t - 12$ こ: 8

(3) さ~す: ABD, ACD, BCD (さ~すは順不同) せ: $\frac{3}{5}$ そ: $\frac{4}{5}$

(4) た: $\frac{11}{7}$ ち: $\frac{44}{7}$