2024 年度　岡山大学（前期）

医学部　試験時間：120 分

全問必答

1　m，n を正の整数とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$x^{3m}-1$ は x^3-1 で割り切れることを示せ。

(2)　x^n-1 は x^2+x+1 で割った余りを求めよ。

(3)　$x^{2024}-1$ を x^2-x+1 で割った余りを求めよ。

2　数直線上を動く点 P がある。点 P は，原点 O を出発して，1 枚のコインを 1 回投げるごとに，表が出たら数直線上を正の向きに 1 だけ進み，裏が出たら数直線上を負の向きに 1 だけ進むものとする。コインの表が出る確率と裏が出る確率はともに $\dfrac{1}{2}$ であるとし，コインを n 回投げ終えた時点での点 P の座標を x_n とする。コインを 10 回投げるとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$x_{10}=0$ となる確率を求めよ。

(2)　$x_5 \neq 1$ かつ $x_{10}=0$ となる確率を求めよ。

(3)　$0 \leqq x_n \leqq 3$（$n=1$，2，…，9）かつ $x_{10}=0$ となる確率を求めよ。

3　四面体 OABC において，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=1$ とし，$\angle\mathrm{COA}=\alpha$，$\angle\mathrm{COB}=\beta$，$\angle\mathrm{AOB}=\gamma$ とする。ただし，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。辺 OA の延長上に点 D を $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ が垂直になるようにとり，辺 OB の延長上に点 E を $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CE}}$ が垂直になるようにとる。$\angle\mathrm{DCE}=\theta$ とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とするとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ を $\vec{a}$，$\vec{c}$，$\cos\alpha$ を用いて表せ。また，$\overrightarrow{\mathrm{CE}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$，$\cos\beta$ を用いて表せ。

(2)　$\cos\theta$ を $\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\sin\beta$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ を用いて表せ。

(3)　$\cos\gamma=\cos\alpha\cos\beta$，$\beta=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ とする。点 C から平面 DOE に下ろした垂線の足を P とするとき，$\mathrm{CP}=\dfrac{1}{\tan\gamma}$ となることを示せ。

4　座標平面上で，線分 $S: x+y=1$（$0 \leqq x \leqq 1$）と曲線 $C: \sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ で囲まれた図形 D を考える。S 上に点 $(0,\ 1)$ からの距離が t となる点 P をとる。このとき，$0 \leqq t \leqq \sqrt{2}$ である。また，点 P を通り，直線 $x+y=1$ と垂直に交わる直線を ℓ とする。以下の問いに答えよ。

(1)　直線 ℓ の方程式を t を用いて表せ。

(2)　直線 ℓ と曲線 C の交点を Q とする。線分 PQ の長さを t を用いて表せ。

(3)　図形 D を直線 $x+y=1$ のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

2024 年度　岡山大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

(1)　証明は省略

(2)　$\begin{cases} 0 & (n \text{ が } 3 \text{ の倍数のとき}) \\ x-1 & (n \text{ が } 3 \text{ で割って } 1 \text{ 余るとき}) \\ -x-2 & (n \text{ が } 3 \text{ で割って } 2 \text{ 余るとき}) \end{cases}$

(3)　$x-2$

2

(1)　$\dfrac{63}{256}$　　(2)　$\dfrac{19}{128}$　　(3)　$\dfrac{17}{512}$

3

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \dfrac{1}{\cos\alpha}\vec{a} - \vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{CE}} = \dfrac{1}{\cos\beta}\vec{b} - \vec{c}$

(2)　$\cos\theta = \dfrac{\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}$

(3)　証明は省略

4

(1)　$y = x + 1 - \sqrt{2}t$　　(2)　$t - \dfrac{\sqrt{2}}{2}t^2$　　(3)　$\dfrac{\sqrt{2}}{15}\pi$