

## 2024年度 宮崎大学 (前期)

医学部

試験時間：120 分

全問必答

**1**  $a, b, c$  を整数とし、

$$P = a + b + c$$

$$Q = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$$

$$R = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

とおく。このとき、次の各問に答えよ。

- (1)  $P$  が 3 の倍数ならば、 $Q$  は 3 の倍数となることを示せ。
- (2)  $Q$  が 3 の倍数ならば、 $P$  は 3 の倍数となることを示せ。
- (3)  $R$  が 3 の倍数ならば、 $R$  は 9 の倍数でもあることを示せ。

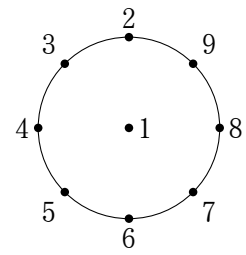
**2**  $0 \leq \theta < \pi$  とする。 $t = \cos \theta$  とするとき、次の各問に答えよ。

- (1)  $\cos 4\theta$  を  $t$  の式で表せ。
- (2)  $\cos 4\theta = \cos \theta$  を満たすような  $t$  の値をすべて求めよ。
- (3)  $\sin^2 \frac{2}{5}\pi + \sin^2 \frac{4}{5}\pi$  の値を求めよ。

**3** 1 辺の長さが 1 の正四面体  $OABC$  において、 $\triangle ABC$  の重心を  $G$ 、線分  $BC$  を  $1:3$  に内分する点を  $D$  とする。また、直線  $AB$  上にあり、 $\overrightarrow{GD} \perp \overrightarrow{GE}$  を満たす点を  $E$  とする。このとき、 $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$ 、 $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$  として、次の各問に答えよ。

- (1)  $\overrightarrow{AG}$  を  $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$  を用いて表せ。
- (2)  $\overrightarrow{GD}$ 、 $\overrightarrow{GE}$  のそれぞれを、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$  を用いて表せ。また、 $|\overrightarrow{GD}|$ 、 $|\overrightarrow{GE}|$  の値をそれぞれ求めよ。
- (3)  $\overrightarrow{OG} \cdot \vec{b}$  と  $\overrightarrow{OG} \cdot \vec{c}$  の値をそれぞれ求めよ。
- (4)  $P$  を平面  $ABC$  上の点とする。また、点  $P$  は、直線  $GD$  で平面  $ABC$  を 2 つに分けたときに、点  $E$  と同じ側にあるとする。 $\triangle DGP$  の面積が 1 のとき、 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{GE}$  の値を求めよ。

**4** 平面上に固定された円があり、円周上に点が 8 つ、円周を 8 等分するようにとられている。さらに、右図のように、番号 1 は円の中心を表し、番号 2 ~ 9 はそれぞれ、円周上の点を表すとする。1 から 9 までの番号が 1 つずつ書かれた 9 枚のカードがあり、A, B, C の 3 人が、司会者のもとで次のゲームを行う。

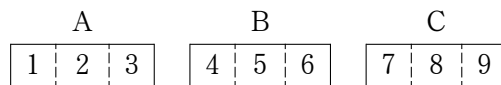


司会者は、9 枚のカードから無作為に 3 枚をとって A に渡し、続いて、残り 6 枚のカードから無作為に 3 枚をとって B に渡し、続いて、残った 3 枚のカードを C に渡す。A は、受け取ったカードに書かれた番号が表す 3 点のうちどの 2 点も線分で結ぶ。B も C も、A と同じことを行う。このようにして、3 人それぞれが図形を作る。

このとき、次の各問に答えよ。

- (1) A の作る図形が三角形でない確率を求めよ。
- (2) 3 人の作る図形がいずれも三角形である確率を求めよ。
- (3) このゲームを 4 回行ったとき、次の 6 つの条件 ①~⑥ がすべて満たされるとする。ただし、 $\boxed{1}$ ~ $\boxed{9}$  はそれぞれ、1 ~ 9 の番号が書かれたカードを表す。
  - ① ある回で誰かに線分で結ばれたことのある 2 点は、他のどの回においても誰にも結ばれない
  - ② A の作る図形は 4 回とも三角形ではない
  - ③ 1 回目に、B は  $\boxed{3}$ を受け取る
  - ④ 2 回目に、B は  $\boxed{2}$ と  $\boxed{4}$ を、C は  $\boxed{5}$ と  $\boxed{6}$ を受け取る
  - ⑤ 3 回目に、B は  $\boxed{2}$ と  $\boxed{3}$ を、C は  $\boxed{6}$ と  $\boxed{7}$ を受け取る
  - ⑥ 4 回目に、C は  $\boxed{2}$ と  $\boxed{8}$ を受け取る

このとき、A, B, C のそれぞれが各回でどの番号のカードを受け取ったか答えよ。ただし、例えば、ある回で A が  $\boxed{1}$ ,  $\boxed{2}$ ,  $\boxed{3}$ , B が  $\boxed{4}$ ,  $\boxed{5}$ ,  $\boxed{6}$ , C が  $\boxed{7}$ ,  $\boxed{8}$ ,  $\boxed{9}$ を受け取ったときは、



のように解答欄に記すとし、解答欄において番号の書かれていない部分のみを埋めよ。なお、受け取ったカードの組み合わせが正しければ、その番号の並び順は問わない。

**【解答用紙】**

	A	B	C									
1 回目	<table style="border-collapse: collapse;"><tr><td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px;"></td></tr></table>				<table style="border-collapse: collapse;"><tr><td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; text-align: center;">3</td><td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px;"></td></tr></table>	3			<table style="border-collapse: collapse;"><tr><td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px;"></td></tr></table>			
3												
2 回目	<table style="border-collapse: collapse;"><tr><td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px;"></td></tr></table>				<table style="border-collapse: collapse;"><tr><td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; text-align: center;">2</td><td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; text-align: center;">4</td><td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px;"></td></tr></table>	2	4		<table style="border-collapse: collapse;"><tr><td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; text-align: center;">5</td><td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; text-align: center;">6</td><td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px;"></td></tr></table>	5	6	
2	4											
5	6											
3 回目	<table style="border-collapse: collapse;"><tr><td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px;"></td></tr></table>				<table style="border-collapse: collapse;"><tr><td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; text-align: center;">2</td><td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; text-align: center;">3</td><td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px;"></td></tr></table>	2	3		<table style="border-collapse: collapse;"><tr><td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; text-align: center;">6</td><td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; text-align: center;">7</td><td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px;"></td></tr></table>	6	7	
2	3											
6	7											
4 回目	<table style="border-collapse: collapse;"><tr><td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px;"></td></tr></table>				<table style="border-collapse: collapse;"><tr><td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px;"></td></tr></table>				<table style="border-collapse: collapse;"><tr><td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; text-align: center;">2</td><td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; text-align: center;">8</td><td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px;"></td></tr></table>	2	8	
2	8											

**5** 関数  $f(x) = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}$  ( $-1 < x < 1$ ) および座標平面上の曲線  $C: y = f(x)$  について、次の各問に答えよ。ただし、 $\log x$  は  $x$  の自然対数を表す。

- (1)  $f(x)$  の導関数  $f'(x)$  および第 2 次導関数  $f''(x)$  を求めよ。
- (2)  $\lim_{x \rightarrow -1+0} f(x)$  および  $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x)$  を求めよ。
- (3) 関数  $f(x)$  の増減、極値、曲線  $C$  の凹凸、変曲点および漸近線を調べて、曲線  $C$  の概形をかけ。
- (4) 関係式  $y = f(x)$  について、 $x$  を  $y$  の式で表せ。また、 $\frac{d}{dy} \left( \frac{1}{e^y + e^{-y}} \right)$  を求めよ。
- (5) 曲線  $C$  と  $x$  軸、直線  $x = 1$  および直線  $y = \alpha$  ( $\alpha > 0$ ) で囲まれた部分を  $y$  軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を  $V(\alpha)$  とする。このとき、 $V(\alpha)$  および  $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} V(\alpha)$  を求めよ。

## 2024年度 宮崎大学 (前期)

医学部

(略解)

📖 証明, 図示などは省略

**1**

- (1) 証明は省略 (2) 証明は省略 (3) 証明は省略

**2**

- (1)  $\cos 4\theta = 8t^4 - 8t^2 + 1$  (2)  $t = 1, -\frac{1}{2}, \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$  (3)  $\frac{5}{4}$

**3**

- (1)  $\vec{AG} = \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$   
 (2)  $\vec{GD} = \frac{5}{12}\vec{b} - \frac{1}{12}\vec{c}, \vec{GE} = \frac{1}{9}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{c}, |\vec{GD}| = \frac{\sqrt{21}}{12}, |\vec{GE}| = \frac{\sqrt{7}}{9}$   
 (3)  $\vec{OG} \cdot \vec{b} = 0, \vec{OG} \cdot \vec{c} = 0$   
 (4)  $\vec{OP} \cdot \vec{GE} = \frac{8\sqrt{3}}{9}$

**4**

- (1)  $\frac{1}{21}$   
 (2)  $\frac{6}{7}$   
 (3) 答えは以下の太字

	A			B			C		
1回目	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>6</b>	3	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>7</b>
2回目	<b>1</b>	<b>3</b>	<b>7</b>	2	4	<b>9</b>	5	6	<b>8</b>
3回目	<b>1</b>	<b>4</b>	<b>8</b>	2	3	<b>5</b>	6	7	<b>9</b>
4回目	<b>1</b>	<b>5</b>	<b>9</b>	<b>3</b>	4	<b>6</b>	2	8	<b>7</b>

**5**

- (1)  $f'(x) = \frac{1}{1-x^2}, f''(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$   
 (2)  $\lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \infty$   
 (3) 変曲点:  $(0, 0)$ , 漸近線:  $x = \pm 1$ , 図示は省略  
 (4)  $x = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}, \frac{d}{dy} \left( \frac{1}{e^y + e^{-y}} \right) = -\frac{e^y - e^{-y}}{(e^y + e^{-y})^2}$   
 (5)  $V(\alpha) = \pi \left( 1 - \frac{2}{e^{2\alpha} + 1} \right), \lim_{\alpha \rightarrow \infty} V(\alpha) = \pi$