2024年度　北海道大学（前期）

医学部　試験時間：120 分

全問必答

1　t を実数とし，xy 平面上の点 $\mathrm{P}(\cos 2t,\ \cos t)$ および点 $\mathrm{Q}(\sin t,\ \sin 2t)$ を考える。

(1)　点 P と点 Q が一致するような t の値をすべて求めよ。

(2)　t が $0 < t < 2\pi$ の範囲で変化するとき，点 P の軌跡を xy 平面上に図示せよ。ただし，x 軸，y 軸との共有点がある場合は，それらの座標を求め，図中に記せ。

2　各面に 1 つずつ数が書かれた正八面体のさいころがある。「1」，「2」，「3」が書かれた面がそれぞれ 1 つずつあり，残りの 5 つの面には「0」が書かれている。このさいころを水平な床面に投げて，出た面に書かれた数を持ち点に加えるという試行を考える。最初の持ち点は 0 とし，この試行を繰り返す。例えば，3 回の試行を行ったとき，出た面に書かれた数が「0」，「2」，「3」であれば，持ち点は 5 となる。なお，さいころが水平な床面にあるとき，さいころの上部の水平な面を出た面とよぶ。また，さいころを投げるとき，各面が出ることは同様に確からしいとする。

(1)　この試行を n 回行ったとき，持ち点が 2 以下である確率を求めよ。ただし，n は 2 以上の自然数とする。

(2)　この試行を 4 回行って持ち点が 10 以上であったときに，さらにこの試行を 2 回行って持ち点が 17 以上である条件付き確率を求めよ。

3　次の問に答えよ。

(1)　α を実数とする。次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = \alpha,\ a_{n+1} = \frac{1}{2}a_{n+1}\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(2)　関数 $f_1(x)$，$f_2(x)$，$f_3(x)$，$\cdots\cdots$ を次の関係式で定める。

$$f_1(x) = 3x$$

$$f_{n+1}(x) = (n+2)x^{n+1} + \left(\int_0^1 f_n(t)\,dt\right)x\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

関数 $f_n(x)$ を x と n の式で表せ。

© 大学受験・数学塾　管理人：makoto

4　三角形 OAB が，$|\overrightarrow{OA}|=3$，$|\overrightarrow{AB}|=5$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=10$ をみたしているとする。三角形 OAB の内接円の中心を I とし，この内接円と辺 OA の接点を H とする。

(1)　辺 OB の長さを求めよ。

(2)　$\overrightarrow{OI}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ。

(3)　$\overrightarrow{HI}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ。

5　関数

$$f(x)=x\log(x+2)+1 \quad (x>-2)$$

を考える。$y=f(x)$ で表される曲線を C とする。C の接線のうち傾きが正で原点を通るものを ℓ とする。ただし，$\log t$ は t の自然対数である。

(1)　直線 ℓ の方程式を求めよ。

(2)　曲線 C は下に凸であることを証明せよ。

(3)　C と ℓ および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

2024年度　北海道大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

(1)　$t=\dfrac{\pi}{6}+2n\pi,\ \dfrac{5}{6}\pi+2n\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi+2n\pi$（$n$ は整数）

(2)　放物線：$x=2y^2-1$（$-1\leqq y<1$），図示は省略

2

(1)　$\dfrac{(n^2+19n+50)5^{n-2}}{2\cdot 8^n}$

(2)　$\dfrac{7}{960}$

3

(1)　$a_n=2+(\alpha-2)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

(2)　$f_n(x)=(n+1)x^n+\left\{2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}x$

4

(1)　6

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\dfrac{3}{7}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{3}{14}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{HI}}=-\dfrac{5}{21}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{3}{14}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

5

(1)　$y=\left(2\log 2+\dfrac{1}{2}\right)x$

(2)　証明は省略

(3)　$2(1-\log 2)$

© 大学受験・数学塾　管理人：makoto