2024 年度　信州大学（前期）

医学部　試験時間：120 分

全問必答

1　平面上の 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ は，$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$，および $\vec{a}\cdot\vec{b}=1$ を満たすとする。k を定数とし，2 点 $\mathrm{Q}(2k\vec{a}+\vec{b})$，$\mathrm{R}(-3\vec{b})$ を直径の両端とする円を C，点 $\mathrm{S}(-4\vec{b})$ を通り $\vec{a}$ に平行な直線を ℓ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　円 C の半径 r を k を用いて表せ。

(2)　直線 ℓ が円 C と共有点をもつとき，k のとり得る値の範囲を求めよ。

2　3 つの箱 A，B，C と，赤球 8 個，白球 30 個がある。この 38 個の球から 30 個選び，3 つの箱 A，B，C に 10 個ずつ入れるとき，次の問いに答えよ。ただし，同じ色の球は区別しないものとする。

(1)　どの箱にも少なくとも 1 個の赤球が入り，かつ，すべての赤球がいずれかの箱に入るような入れ方は何通りあるか。

(2)　入れ方は全部で何通りあるか。

3　原点を O とする座標平面において，直線 $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ の $x>0$ の部分を ℓ，直線 $y=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ の $x>0$ の部分を m とする。点 P は ℓ 上を，点 Q は m 上を，$\mathrm{PQ}=2$ を満たしながら動くとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\angle\mathrm{OPQ}=t$ とするとき，P，Q の座標を t を用いて表せ。

(2)　線分 PQ の中点 M の軌跡を求め，座標平面上に図示せよ。

4　e を自然対数の底とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　すべての実数 x に対して，不等式 $\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\geqq 1+\dfrac{1}{2}x^2$ が成り立つことを示せ。

(2)　等式 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\cos 2t}\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos 2t}\,dt$ が成り立つことを示せ。

(3)　不等式 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos 2t}\,dt\geqq\frac{5}{8}\pi$ が成り立つことを示せ。

5　n を自然数とし，1 から n までの異なる n 個の自然数からなる集合を N とする。N の 2 つの部分集合 P_1，P_2 は

$$P_1\cap P_2=\varnothing\quad\text{かつ}\quad P_1\cup P_2=N$$

を満たすとする。ただし，$\varnothing$ は空集合とする。P_1 の要素の総和を S_1，P_2 の要素の総和を S_2 とするとき，$S_1=S_2$ を満たす P_1，P_2 が存在するような n の値をすべて求めよ。

2024 年度　信州大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

（1）　$r=2\sqrt{k^2+k+1}$

（2）　$k \leqq \dfrac{-2-\sqrt{15}}{4}$，　$\dfrac{-2+\sqrt{15}}{4} \leqq k$

2

（1）　21 通り

（2）　165 通り

3

（1）　$\mathrm{P}\left(2\sin\left(\dfrac{2}{3}\pi-t\right),\ \dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(\dfrac{2}{3}\pi-t\right)\right)$，$\mathrm{Q}\left(2\sin t,\ -\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin t\right)$

（2）　楕円：$\dfrac{x^2}{3}+3y^2=1\ \left(x>\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，図示は省略

4

（1）　証明は省略

（2）　証明は省略

（3）　証明は省略

5　$n=4m$，$4m-1$（m は自然数）