

2024 年度 京都府立医科大学（前期）

医学部

試験時間：120 分

 全問必答

1 x は $x \neq 0, \pm 1$ である実数とし、 $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$ とおく。 c は実数とし、 x の方程式

$$(E) \quad x + f(x) + f(f(x)) + f(f(f(x))) = c$$

を考える。

(1) $f(f(f(f(x)))) = x$ であることを証明せよ。

(2) $x = \alpha$ が方程式 (E) の実数解であるとき

$$f(\alpha), f(f(\alpha)), f(f(f(\alpha)))$$

も (E) の実数解であることを証明せよ。

(3) (E) の実数解 $x = \alpha$ に対して

$$y_1 = \alpha + f(f(\alpha)), y_2 = f(\alpha) + f(f(f(\alpha)))$$

とおく。 y_1, y_2 が y の 2 次方程式 $y^2 - cy - 4 = 0$ の解であることを証明せよ。

(4) $c = 3$ のとき方程式 (E) を解け。

2 以下のような硬貨投げを行う。

1 枚の硬貨を投げて裏が出たら硬貨投げを終了し、表が出たら 1 枚の硬貨を加え 2 枚の硬貨を同時に投げる。2 枚の硬貨のうち 1 枚でも裏が出たら硬貨投げを終了し、全部が表ならば 1 枚の硬貨を加え 3 枚の硬貨を同時に投げる。3 枚のうち 1 枚でも裏が出たら硬貨投げを終了し、全部が表ならば 1 枚の硬貨を加え 4 枚の硬貨を同時に投げる。以下同様にして全部が表ならば 1 枚の硬貨を加えて硬貨投げを続ける。

1 枚の硬貨から始めて、硬貨が n 枚のときに硬貨投げが終了する確率を p_n ($n \geq 1$) とする。

(1) p_n を n を用いて表せ。

(2) 無限級数の和 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ を求めよ。

(3) $P = \sum_{n=1}^{\infty} p_{2n-1}$ とおく。 $0.6 < P < 0.62$ であることを証明せよ。ここで $\sum_{n=1}^{\infty} p_{2n-1}$ が収束することは用いてよい。

3 半径 1 の円に内接する五角形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ を考える。線分 A_1A_4 と A_2A_5 の交点を B とし、 $\triangle A_1A_2B$ は正三角形であるとする。また、 $A_3A_2 = A_3A_4$ とする。 $a = A_1A_2$, $b = A_4A_5$ とおく。

(1) 線分 A_3B の長さを求めよ。

(2) b を a を用いて表せ。

(3) 五角形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ の面積 S を a を用いて表し、 S の最大値を求めよ。

4 xyz 空間の点 $A(-2, 0, 0)$, $B(2, -2\sqrt{3}, 0)$, $C(-1, \sqrt{3}, 0)$, $D\left(-1, \sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ を頂点とする四面体 $ABCD$ を K とする。実数 t に対して、方程式 $x = t$ で表される平面を H とする。

- (1) $-2 \leq t \leq 2$ のとき、平面 H と K の辺 AB との共有点を P とする。 P の座標を t を用いて表せ。
- (2) $-2 \leq t \leq -1$ のとき、平面 H と K の辺 AC , AD との共有点をそれぞれ Q , R とする。 Q , R の座標を t を用いて表せ。
- (3) $-1 \leq t \leq 2$ のとき、平面 H と K の辺 BC , BD との共有点をそれぞれ Q' , R' とする。 Q' , R' の座標を t を用いて表せ。
- (4) K を x 軸のまわりに 1 回転させるとき、 K が通過する部分がつくる立体の体積 V を求めよ。

2024 年度 京都府立医科大学（前期）

医学部

（略解）

 証明，図示などは省略**1**

(1) 証明は省略

(3) 証明は省略

(2) 証明は省略

(4) $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}, 2 \pm \sqrt{5}$

2

(1) $p_n = \frac{1}{2^{\frac{n(n-1)}{2}}} - \frac{1}{2^{\frac{n(n+1)}{2}}}$

(2) 1

(3) 証明は省略

3

(1) 1

(2) $b = \frac{-a + \sqrt{12 - 3a^2}}{2}$

(3) $S = \frac{\sqrt{3}}{16} \left(a + \sqrt{12 - 3a^2} \right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}$, 最大値: $\frac{5\sqrt{3}}{4}$ ($a = 1$)

4

(1) $P\left(t, -\frac{\sqrt{3}}{2}(t+2), 0\right)$

(2) $Q(t, \sqrt{3}(t+2), 0), R\left(t, \sqrt{3}(t+2), \frac{3\sqrt{3}}{2}(t+2)\right)$

(3) $Q'(t, -\sqrt{3}t, 0), R'\left(t, -\sqrt{3}t, \frac{\sqrt{3}}{2}(2-t)\right)$

(4) $V = 15\pi$