2024 年度　京都大学（前期）

医学部　試験時間：150 分

全問必答

1　n 個の異なる色を用意する。立方体の各面にいずれかの色を塗る。各面にどの色を塗るかは同様に確からしいとする。辺を共有するどの二つの面にも異なる色が塗られる確率を p_n とする。次の問いに答えよ。

(1)　p_4 を求めよ。

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n$ を求めよ。

2　$|x| \leqq 2$ を満たす複素数 x と，$|y-(8+6i)| = 3$ を満たす複素数 y に対して，$z = \dfrac{x+y}{2}$ とする。このような複素数 z が複素数平面において動く領域を図示し，その面積を求めよ。

3　座標空間の 4 点 O，A，B，C は同一平面上にないとする。線分 OA の中点を P，線分 AB の中点を Q とする。実数 x，y に対して，直線 OC 上の点 X と，直線 BC 上の点 Y を次のように定める。

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}} = x\overrightarrow{\mathrm{OC}},\ \overrightarrow{\mathrm{BY}} = y\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

このとき，直線 QY と直線 PX がねじれの位置にあるための x，y に関する必要十分条件を求めよ。

4　与えられた自然数 a_0 に対して，自然数からなる数列 a_0，a_1，a_2，$\cdots$ を次のように定める。

$$a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{a_n}{2} & (a_n \text{ が偶数のとき}) \\ \dfrac{3a_n+1}{2} & (a_n \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

次の問いに答えよ。

(1)　a_0，a_1，a_2，a_3 がすべて奇数であるような最小の自然数 a_0 を求めよ。

(2)　a_0，a_1，$\cdots$，a_{10} がすべて奇数であるような最小の自然数 a_0 を求めよ。

5　a は $a \geqq 1$ を満たす定数とする。座標平面上で，次の 4 つの不等式が表す領域を D_a とする。

$$x \geqq 0,\ \frac{e^x - e^{-x}}{2} \leqq y,\ y \leqq \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ y \leqq a$$

次の問いに答えよ。

(1)　D_a の面積 S_a を求めよ。

(2)　$\displaystyle\lim_{a\to\infty} S_a$ を求めよ。

6　自然数 k に対して，$a_k = 2^{\sqrt{k}}$ とする。n を自然数とし，a_k の整数部分が n 桁であるような k の個数を N_n とする。また，a_k の整数部分が n 桁であり，その最高位の数字が 1 であるような k の個数を L_n とする。次を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L_n}{N_n}$$

ただし，例えば実数 2345.678 の整数部分 2345 は 4 桁で，最高位の数字は 2 である。

2024 年度　京都大学（前期）

医学部 （略解）

証明，図示などは省略

1

（1）　$p_4 = \dfrac{3}{128}$

（2）　1

2　図示は省略，6π

3　$x \fallingdotseq y$

4

（1）　$a_0 = 15$

（2）　$a_0 = 2047$

5

（1）　$S_a = 1 - \left(\sqrt{a^2+1} - \sqrt{a^2-1}\right) + a\left\{\log\left(a + \sqrt{a^2+1}\right) - \log\left(a + \sqrt{a^2-1}\right)\right\}$

（2）　1

6　$\log_{10} 2$