2023年度　順天堂大学（前期）

医学部　試験時間：70分

全問必答

1 $\boxed{}$ に適する解答をマークせよ。ただし，同一問題で同じ記号の $\boxed{}$ がある場合は同一の値がはいる。

(1) (i) 複素数 z に対して，$w=z^2$ とおく。点 z が複素数平面上の点 $\dfrac{3}{8}$ を通り，虚軸に平行な直線上を動くとする。このとき，$z=\dfrac{3}{8}+yi$，$w=u+vi$ とおくと $u=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イウ}}-\dfrac{\boxed{エオ}}{\boxed{カ}}v^{\boxed{キ}}$ という関係が得られるので，点 w は複素数平面上で実軸と点 $\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケコ}}$ で交わり，虚軸と $\pm\dfrac{\boxed{サ}}{\boxed{シス}}i$ の 2 点で交わる放物線を描く。

(ii) 複素数 z に対して，$w=\dfrac{1}{z}$ とおく。点 z が複素数平面上の点 $2i$ を通り，実軸に平行な直線上を動くとする。このとき，$z=x+2i$，$w=u+vi$ とおくと $u^2+v^2=\dfrac{1}{x^2+\boxed{セ}}$ となり，$u^2+\left(v+\dfrac{\boxed{ソ}}{\boxed{タ}}\right)^{\boxed{チ}}=\dfrac{\boxed{ツ}}{\boxed{テト}}$ という関係が得られるので，点 w は複素数平面上で点 $\dfrac{\boxed{ナニ}}{\boxed{ヌ}}i$ を中心とする半径 $\dfrac{\boxed{ネ}}{\boxed{ノ}}$ の円を描く。ただし，点 $\boxed{ハ}$ を除く。

(2) 座標平面上の 3 点 A$(-1,\ -1)$，P$(x_1,\ y_1)$，Q$(x_2,\ y_2)$ について，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ の関係があるとき，$x_1=\boxed{ア}x_2+\boxed{イ}$，$y_1=\boxed{ウ}y_2+\boxed{エ}$ となる。

$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を満たしながら点 P が曲線 $\ell_1: y=x^3-3x$ 上を動くとき，点 Q は曲線 $\ell_2: y=ax^3+bx^2+cx+d$ 上を動く。ただし，$a=\boxed{オ}$，$b=\boxed{カ}$，$c=\boxed{キ}$，$d=\dfrac{\boxed{クケ}}{\boxed{コ}}$ である。

このような関係があるとき，曲線 ℓ_1 と曲線 ℓ_2 は点 A を相似の中心として相似の位置にあるといい，相似比は 1 : 2 である。

曲線 ℓ_1 と曲線 $\ell_3: y=\dfrac{1}{4}x^3+\dfrac{3}{4}x^2-\dfrac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}x-\dfrac{11}{4}$ が相似の位置にあるとき，3 次の係数より相似比は $\boxed{ス}$: 1 であり，相似の中心は点 B$\left(\boxed{セ},\ \boxed{ソ}\right)$ である。

(3) (i)　初項 1，公比 $-\dfrac{4}{5}$ の等比数列の初項から第 n 項までの和を S_n とおくと，$S_n<\dfrac{1}{2}$ を満たす n の最大値は $\boxed{\text{アイ}}$ である。ただし，$\log_{10}2$ の小数点第 4 位までの近似値は 0.3010 である。

(ii)　一般項が $a_n=\sin^n\left(\dfrac{2}{3}n\pi\right)$ である数列 $\{a_n\}$ について，

$$\sum_{n=1}^{6}a_n=\frac{\boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}+\boxed{\text{オカ}}}{\boxed{\text{キク}}}$$

である。また，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{\boxed{\text{ケコ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}+\boxed{\text{シス}}}{\boxed{\text{セソ}}}$ である。

2

$\boxed{}$ に適する解答をマークせよ。

(1)　点 O を原点とする座標空間において，2 点 $\mathrm{A}\left(\sqrt{3},\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\mathrm{B}\left(\sqrt{3},\ -\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ をとる。△OAB は 1 辺の長さが $\boxed{\text{ア}}$ の正三角形である。

t を実数として，$0\leqq t\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき平面 $z=t$ と辺 OA は点 $\left(\boxed{\text{イ}}\,t,\ \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}}{\boxed{\text{エ}}}t,\ t\right)$ で交わり，平面 $z=t$ と辺 AB は点 $\left(\sqrt{\boxed{\text{オ}}},\ \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{カ}}}}{\boxed{\text{キ}}}t,\ t\right)$ で交わる。

△OAB を z 軸の周りに 1 回転して得られる立体を V とすると，立体 V と平面 $z=t$ は $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\leqq t\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき交わりを持ち，そのときの立体 V の平面 $z=t$ による切り口は半径 $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{クケ}}}}{\boxed{\text{コ}}}t$ と $\sqrt{\boxed{\text{サ}}+\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}t^2}$ の同心円で囲まれた部分となる。したがって，切り口の面積は $\left(\boxed{\text{セ}}-\boxed{\text{ソ}}\,t^2\right)\pi$ となり，V の体積は $\boxed{\text{タ}}\sqrt{\boxed{\text{チ}}}\,\pi$ となることがわかる。

(2)　3 点 O，A，B を通る円 C は中心が

点 $\left(\dfrac{\boxed{\text{ツ}}\sqrt{\boxed{\text{テ}}}}{\boxed{\text{ト}}},\ \boxed{\text{ナ}},\ \boxed{\text{ニ}}\right)$，半径が $\dfrac{\boxed{\text{ヌ}}\sqrt{\boxed{\text{ネ}}}}{\boxed{\text{ノ}}}$

の円であり，$z=\sqrt{\boxed{\text{ハ}}}\,y$ で表される平面上にある。円 C と平面 $z=t$ は $\boxed{\text{ヒフ}}\leqq t\leqq\boxed{\text{ヘ}}$ のとき交点を持ち，その交点の座標は

$$\left(\frac{\boxed{\text{ホ}}\sqrt{\boxed{\text{マ}}}}{\boxed{\text{ミ}}}\left(\boxed{\text{ム}}\pm\sqrt{\boxed{\text{メ}}-t^2}\right),\ \frac{\sqrt{\boxed{\text{モ}}}}{\boxed{\text{ヤ}}}t,\ t\right)$$

と表される。したがって，円 C とその内部からなる円板を z 軸の周りに 1 回転して得られる立体の体積は $\dfrac{\boxed{\text{ユ}}}{\boxed{\text{ヨ}}}\pi^2$ である。

3　$P(s,\ t)$ を s と t の整式とする。

(1)　$A=s^3+2s^2t+3st^2+4t^3$ と $B=s+t$ を s の整式と考えて，A を B で割った商と余りを求めよ。

(2)　$P(s,\ t)=f_n(t)s^n+f_{n-1}(t)s^{n-1}+\cdots+f_1(t)s+f_0(t)$ とおく。ただし，$f_n(t)$，$f_{n-1}(t)$，$\cdots$，$f_0(t)$ は t の整式とし，$f_n(t)\neq 0$ とする。このとき，s，t の整式 $Q(s,\ t)$ と t の整式 $R(t)$ を使って

$$P(s,\ t)=Q(s,\ t)(s-t)+R(t)$$

と表せることを数学的帰納法を用いて示せ。

(3)　$P(x,\ y)=-P(y,\ x)$ であるとき，1 次式 $(s-t)$ は整式 $P(s,\ t)$ の因数であることを示せ。ただし，$P(x,\ y)$ は $P(s,\ t)$ に $s=x$，$t=y$ を代入して得られる整式をあらわし，$P(y,\ x)$ は $P(s,\ t)$ に $s=y$，$t=x$ を代入して得られる整式をあらわす。

(4)　1 次式 $(s-t)$ が整式 $P(s,\ t)$ の因数であることは $P(x,\ y)=-P(y,\ x)$ であることの十分条件ではないことを示せ。

2023年度　順天堂大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

(1) (i) $\dfrac{\text{ア}}{\text{イウ}}:\dfrac{9}{64}$　$\dfrac{\text{エオ}}{\text{カ}}:\dfrac{16}{9}$　キ : 2　$\dfrac{\text{ク}}{\text{ケコ}}:\dfrac{9}{64}$　$\dfrac{\text{サ}}{\text{シス}}:\dfrac{9}{32}$

(ii) セ : 4　$\dfrac{\text{ソ}}{\text{タ}}:\dfrac{1}{4}$　チ : 2　$\dfrac{\text{ツ}}{\text{テト}}:\dfrac{1}{16}$　$\dfrac{\text{ナニ}}{\text{ヌ}}:\dfrac{-1}{4}$　$\dfrac{\text{ネ}}{\text{ノ}}:\dfrac{1}{4}$　ハ : 0

(2) ア : 2　イ : 1　ウ : 2　エ : 1　オ : 4　カ : 6　キ : 0　$\dfrac{\text{クケ}}{\text{コ}}:\dfrac{-3}{2}$　$\dfrac{\text{サ}}{\text{シ}}:\dfrac{9}{4}$　ス : 2　セ : 1　ソ : 0

(3) (i) アイ : 10

(ii) $\text{ウ}\sqrt{\text{エ}}:7\sqrt{3}$　オカ : 42　キク : 32　$\text{ケコ}\sqrt{\text{サ}}:14\sqrt{3}$　シス : 84　セソ : 37

2

(1) ア : 2　イ : 2　$\dfrac{\sqrt{\text{ウ}}}{\text{エ}}:\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　オ : 3　$\dfrac{\sqrt{\text{カ}}}{\text{キ}}:\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　$\dfrac{\sqrt{\text{クケ}}}{\text{コ}}:\dfrac{\sqrt{39}}{3}$　サ : 3　$\dfrac{\text{シ}}{\text{ス}}:\dfrac{1}{3}$　セ : 3　ソ : 4
$\text{タ}\sqrt{\text{チ}}:2\sqrt{3}$

(2) $\dfrac{\text{ツ}\sqrt{\text{テ}}}{\text{ト}}:\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　ナ : 0　ニ : 0　$\dfrac{\text{ヌ}\sqrt{\text{ネ}}}{\text{ノ}}:\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　ハ : 3　ヒフ : -1　ヘ : 1　$\dfrac{\text{ホ}\sqrt{\text{マ}}}{\text{ミ}}:\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　ム : 1
メ : 1　$\dfrac{\sqrt{\text{モ}}}{\text{ヤ}}:\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　$\dfrac{\text{ユ}}{\text{ヨ}}:\dfrac{8}{3}$

3

(1) 商 : $s^2+ts+2t^2$，余り : $2t^3$　　(2) 証明は省略
(3) 証明は省略　　(4) 証明は省略