2023 年度　東京慈恵会医科大学（前期）

医学部　　試験時間：90 分

全問必答

1　次の $\boxed{}$ にあてはまる適切な数値を解答欄に記入せよ。
袋の中に 1 から 5 までの番号をつけた 5 個の玉が入っている。この袋から玉を 1 個取り出し，番号を調べてからもとに戻す試行を，4 回続けて行う。n 回目 $(1 \leqq n \leqq 4)$ に取り出された玉の番号を r_n とするとき，

- $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 \leqq 8$ となる確率は $\boxed{（ア）}$
- $\dfrac{4}{r_1 r_2} + \dfrac{2}{r_3 r_4} = 1$ となる確率は $\boxed{（イ）}$

である。

2　n を自然数，a を正の定数とする。関数 $f(x)$ は等式

$$f(x) = x + \frac{1}{n}\int_0^x f(t)\,dt$$

をみたし，関数 $g(x)$ は

$$g(x) = ae^{-\frac{x}{n}} + a$$

とする。2 つの曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ はある 1 点を共有し，その点における 2 つの曲線の接線が直交するとき，次の問いに答えよ。ただし，e は自然対数の底とする。

(1)　$h(x) = e^{-\frac{x}{n}} f(x)$ とおくとき，導関数 $h'(x)$ と $h(x)$ を求めよ。

(2)　a を n を用いて表せ。

(3)　2 つの曲線 $y = f(x)$，$y = g(x)$ と y 軸で囲まれた部分の面積を S_n とするとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{S_1 + S_2 + \cdots + S_n}{n^3}$ を求めよ。

3　O を原点とする座標平面において，第 1 象限に属する点 $\mathrm{P}(\sqrt{2}r,\ \sqrt{3}s)$（$r$，$s$ は有理数）をとるとき，線分 OP の長さは無理数となることを示せ。

4　O を原点とする座標空間に 2 点 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{B}(0,\ 0,\ -1)$ がある。$r>0$，$-\pi \leqq \theta < \pi$ に対して，2 点 $\mathrm{P}(r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ 0)$，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{r}\cos\theta,\ \dfrac{1}{r}\sin\theta,\ 0\right)$ をとり，2 直線 AP と BQ の交点を $\mathrm{R}(a,\ b,\ c)$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　a，b，c の間に成り立つ関係式を求めよ。

(2)　点 $\mathrm{G}(4,\ 1,\ 1)$ をとる。r，θ が $r\cos\theta = \dfrac{1}{2}$ をみたしながら変化するとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ の最大値と，そのときの a，b，c の値を求めよ。

2023年度　東京慈恵会医科大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1　（ア）: $\dfrac{14}{125}$　（イ）: $\dfrac{18}{625}$

2

(1)　$h'(x)=e^{-\frac{x}{n}}$, $h(x)=n\left(1-e^{-\frac{x}{n}}\right)$　(2)　$a=n$

(3)　$\dfrac{2}{3}\left\{1-\sqrt{2}+\log\left(1+\sqrt{2}\right)\right\}$

3　証明は省略

4

(1)　$a^2+b^2+c^2=1$ かつ $-1<c<1$　(2)　最大値 : 3, $a=\dfrac{2}{3}$, $b=\dfrac{2}{3}$, $c=-\dfrac{1}{3}$