2023 年度　東京医科歯科大学（前期）

医学部　試験時間：90 分

全問必答

1　xy 平面において，x 座標および y 座標が共に整数であるような点を格子点と呼ぶ。xy 平面上の相異なる 2 つの格子点を端点とする折れ線のうち，x 座標または y 座標が等しい格子点どうしを結ぶ線分のみから構成され，かつ同じ点を 2 度通ることはないものを，格子折れ線と呼ぶ。ここで，格子折れ線の向きは考慮せず，端点および通過する点がすべて等しい格子折れ線は同じものとする。また，自然数 n に対し，

$$0 \leqq x \leqq n \text{ かつ } 0 \leqq y \leqq 1$$

を満たす格子点全体の集合を V_n とする。さらに，V_n に属する格子点をすべて通り，かつ V_n に属さない格子点は通らない格子折れ線全体の集合を L_n とする。たとえば，7 つの格子点 $(0,\ 1)$，$(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(1,\ 1)$，$(4,\ 1)$，$(4,\ 0)$，$(2,\ 0)$ を順に結んだ折れ線は L_4 に属する。このとき，以下の各問いに答えよ。

(1)　L_1 および L_2 に属する格子折れ線をすべて図示せよ。

(2)　L_4 に属する格子折れ線のうち，両端点の x 座標の差が 3 以上となるものをすべて図示せよ。

(3)　$n \geqq 3$ のとき，L_n に属する格子折れ線のうち，両端点の x 座標の差がちょうど $n-2$ となるものの個数を求めよ。

(4)　L_n に属する格子折れ線の個数 l_n を，n を用いて表せ。

2　xyz 空間において，3 点 $(0,\ 0,\ 0)$，$(1,\ 0,\ 0)$，$(0,\ 1,\ 0)$ を通る平面 π_1 と，3 点 $(1,\ 0,\ 0)$，$(0,\ 1,\ 0)$，$(0,\ 0,\ 1)$ を通る平面 π_2 を考える。$x_0 = 1$，$y_0 = 2$，$z_0 = -2$ として，点 $\mathrm{P}_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ から始めて，次の手順で順に点 $\mathrm{P}_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$，$\mathrm{P}_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$，$\cdots$ を決める。

- k が偶数のとき，π_1 上の点で点 $\mathrm{P}_k(x_k,\ y_k,\ z_k)$ からの距離が最小となるものを $\mathrm{P}_{k+1}(x_{k+1},\ y_{k+1},\ z_{k+1})$ とする。
- k が奇数のとき，π_2 上の点で点 $\mathrm{P}_k(x_k,\ y_k,\ z_k)$ からの距離が最小となるものを $\mathrm{P}_{k+1}(x_{k+1},\ y_{k+1},\ z_{k+1})$ とする。

このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　π_2 に直交するベクトルのうち，長さが 1 で x 成分が正のもの $\overrightarrow{n_2}$ を求めよ。

(2)　x_{k+1}，y_{k+1}，z_{k+1} をそれぞれ x_k，y_k，z_k を用いて表せ。

(3)　$\displaystyle\lim_{k\to\infty} x_k$，$\displaystyle\lim_{k\to\infty} y_k$，$\displaystyle\lim_{k\to\infty} z_k$ を求めよ。

3　a，b を正の実数，p を a より小さい正の実数とし，すべての実数 x について

$$\int_p^{f(x)} \frac{a}{u(a-u)}\,du = bx,\quad 0<f(x)<a$$

かつ $f(0) = p$ を満たす関数 $f(x)$ を考える。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ を a，b，p を用いて表せ。

(2)　$f(-1) = \dfrac{1}{2}$，$f(1) = 1$，$f(3) = \dfrac{3}{2}$ のとき，a，b，p を求めよ。

(3)　(2) のとき，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$ と $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ を求めよ。

2023年度　東京医科歯科大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

（1）　図示は省略　　（2）　図示は省略　　（3）　6 個　　（4）　$l_n = n^2 + n + 2$

2

（1）　$\overrightarrow{n_2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,\ 1,\ 1)$

（2）　$x_{k+1} = \begin{cases} x_k & (k = 0,\ 2,\ 4,\ \cdots) \\ \dfrac{1 + 2x_k - y_k - z_k}{3} & (k = 1,\ 3,\ 5,\ \cdots) \end{cases}$

$y_{k+1} = \begin{cases} y_k & (k = 0,\ 2,\ 4,\ \cdots) \\ \dfrac{1 - x_k + 2y_k - z_k}{3} & (k = 1,\ 3,\ 5,\ \cdots) \end{cases}$

$z_{k+1} = \begin{cases} z_k & (k = 0,\ 2,\ 4,\ \cdots) \\ \dfrac{1 - x_k - y_k + 2z_k}{3} & (k = 1,\ 3,\ 5,\ \cdots) \end{cases}$

（3）　$\displaystyle\lim_{k\to\infty} x_k = 0,\ \lim_{k\to\infty} y_k = 1,\ \lim_{k\to\infty} z_k = 0$

3

（1）　$f(x) = \dfrac{ape^{bx}}{a - p + pe^{bx}}$　　（2）　$a = 2,\ b = \dfrac{1}{2}\log 3,\ p = \sqrt{3} - 1$

（3）　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0,\ \lim_{x\to\infty} f(x) = 2$