2023年度　旭川医科大学（前期）

医学部　試験時間：120 分

全問必答

1　k を正の実数とし，原点を O とする座標平面上で媒介変数 t を用いて

$$x = f(t) = e^{kt}\cos t,\quad y = g(t) = e^{kt}\sin t$$

と表される曲線 C を考える。曲線 C 上の点 P の座標を $(a,\ b)$ とし，$ka \neq b$ を満たすものとする。このとき，次の各問いに答えよ。

(1)　点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ における接線 ℓ の傾きを a，b，k を用いて表せ。

(2)　(1) で求めた接線 ℓ 上に点 P と異なる任意の点 $\mathrm{Q}(x,\ y)$ をとる。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ とのなす角を θ とするとき，$|\cos\theta|$ を k を用いて表せ。

(3)　$\tan\alpha = k\left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とする。関数 $f(t)$ は $\alpha \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で減少関数であることを示せ。

(4)　α を (3) で定めた数とし，$x_1 = f(\beta)\left(\alpha < \beta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とする。このとき，x 軸，y 軸，直線 $x = x_1$，および曲線 C の $\beta \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の部分によって囲まれる図形の面積を求めよ。

2　a，b を実数とする。x に関する 3 次方程式

$$(*)\qquad x^3 - 3ax + b = 0$$

は虚数解をもち，3 個の解は複素数平面上で一直線上にないものとする。このとき，次の各問いに答えよ。

(1) (i)　a，b の満たす条件を示し，それを ab 平面上に図示せよ。

(ii)　方程式 $(*)$ の実数解を c とするとき，虚数解を a，c および虚数単位 i を用いて表せ。

(2)　複素数平面上で方程式 $(*)$ の 3 個の解を頂点とする三角形を K とする。

(i)　K が点 1 を中心とする半径 2 の円 $|z-1| = 2$ に内接しているとき，a と b の値を求めよ。

(ii)　K が点 1 を中心とする半径 r の円に内接しているとき，K の 3 つの頂点を表す複素数と半径 r を a を用いてそれぞれ表し，a のとりうる値の範囲を求めよ。

3　四面体 ABCD において，$\mathrm{AB} = 4$，$\mathrm{BC} = 6$，$\angle\mathrm{ABC} = \angle\mathrm{BCD} = 60^\circ$ とする。辺 AC を $\mathrm{AL} : \mathrm{LC} = 1 : 6$ に内分する点 L をとり，点 A から辺 BC に垂線を下ろし，辺 BC との交点を M とする。AM と BL との交点を P とするとき，次の各問いに答えよ。

(1)　辺 AC の長さ，および内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の値を求めよ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表せ。

(3)　三角形 ABC を含む平面を α とする。点 D から平面 α に下ろした垂線と平面 α との交点は P に一致する。

(i)　PD の長さを求めよ。

(ii)　PD 上に $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = k\overrightarrow{\mathrm{PD}}$ となる点 Q をとる。$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}} = 0$ のとき，k の値と四面体 QABC の体積を求めよ。ただし，$0 < k < 1$ とする。

4　投げたときに表が出る確率と裏が出る確率が等しい硬貨がある。この硬貨を繰り返し投げ，3 回連続して同じ面が出るまで続けるゲームをする。n を自然数とし，n 回目，$n+1$ 回目，$n+2$ 回目に 3 回連続して表が出てゲームが終了するときの場合の数を a_n とおく。このとき，次の各問いに答えよ。

(1)　a_1，a_2，a_3，a_4，a_5 をそれぞれ求めよ。求める過程も示せ。

(2)　$F_1=1$，$F_2=1$，$F_{n+2}=F_n+F_{n+1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で定められた数列 $\{F_n\}$ の一般項は，$F_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$ で与えられる。このとき，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_n}{2^n}$ の和を求めよ。

(3)　n 回目，$n+1$ 回目，$n+2$ 回目に 3 回連続して表が出てゲームが終了する確率を P_n とおく。(2) の結果を用いて，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}P_n$ の和を求めよ。

2023年度　旭川医科大学（前期）

医学部 （略解）

証明，図示などは省略

1

(1) $\dfrac{kb+a}{ka-b}$

(2) $|\cos\theta| = \dfrac{k}{\sqrt{k^2+1}}$

(3) 証明は省略

(4) $\dfrac{1}{4k}\left\{e^{2k\beta}(k\sin 2\beta - 1) + e^{k\pi}\right\}$

2

(1) (i) $b \neq 0$ かつ ($a \leqq 0$ または $b < -2a^{\frac{3}{2}}$ または $b > 2a^{\frac{3}{2}}$)，図示は省略

(ii) $-\dfrac{c}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3(c^2-4a)}}{2}i$

(2) (i) $(a,\ b) = (-1,\ 4)$，(ii) $a,\ -\dfrac{a}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3a(a-4)}}{2}i$，$a<0$，$4<a$

3

(1) $\mathrm{AC} = 2\sqrt{7}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 4$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \dfrac{2}{9}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \dfrac{1}{9}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

(3) (i) $\mathrm{PD} = \dfrac{8\sqrt{6}}{3}$，(ii) $k = \dfrac{1}{16}$，体積：$\sqrt{2}$

4

(1) $a_1 = 1$，$a_2 = 1$，$a_3 = 2$，$a_4 = 3$，$a_5 = 5$

(2) 2

(3) $\dfrac{1}{2}$