2023年度　新潟大学（前期）

医学部　試験時間：90 分

全問必答

1　k を実数とする。全体集合を実数全体の集合とし，その部分集合 A，B を次のように定める。

$$A=\{x \mid x^3-x^2-(k^2+4k+4)x+k^2+4k+4=0\}$$

$$B=\{x \mid x^3-(k^2+3k+3)x^2+k^2x-k^4-3k^3-3k^2=0\}$$

次の問いに答えよ。

(1)　$k=-1$ のとき，集合 A，B，$A\cap B$，$A\cup B$ を，$\{a,\ b,\ c\}$ のように集合の要素を書き並べて表す方法により，それぞれ表せ。空集合になる場合は，空集合を表す記号で答えよ。

(2)　集合 B が集合 A の部分集合となるような k の値をすべて求めよ。そのような k の値が存在しない場合は，その理由を述べよ。

(3)　集合 $A\cup B$ の要素の個数を求めよ。

2　a，b を正の数とし，座標平面上の曲線

$$C_1: y=e^{ax},\quad C_2: y=\sqrt{2x-b}$$

を考える。次の問いに答えよ。

(1)　関数 $y=e^{ax}$ と関数 $y=\sqrt{2x-b}$ の導関数を求めよ。

(2)　曲線 C_1 と曲線 C_2 が 1 点 P を共有し，その点において共通の接線をもつとする。このとき，b と点 P の座標を a を用いて表せ。

(3)　(2) において，曲線 C_1，曲線 C_2，x 軸，y 軸で囲まれる図形の面積を a を用いて表せ。

3　複素数平面上の点 z が原点を中心とする半径 1 の円周上を動くとし，$w=-\dfrac{2(2z-i)}{z+1}$　$(z\neq -1)$ とする。ただし，i は虚数単位とする。次の問いに答えよ。

(1)　$z=i$ のときの w の実部と虚部を求めよ。

(2)　z を w を用いて表せ。

(3)　点 w の描く図形を複素数平面上に図示せよ。

(4)　$|w|$ の最小値とそれを与える z を求めよ。

4　座標空間の 2 点 A$(1,\ -1,\ 1)$，B$(1,\ -1,\ 5)$ を直径の両端とする球面を S とする。次の問いに答えよ。

(1)　球面 S の中心 C の座標と，S の方程式を求めよ。

(2)　点 P が S 上を動くとき，$\triangle$ABP の面積の最大値を求めよ。

(3)　点 Q$(x,\ y,\ z)$ が $\angle \mathrm{QCA} = \dfrac{\pi}{3}$ かつ $y \geqq 0$ を満たしながら S 上を動く。点 R$(1+\sqrt{2},\ 0,\ 4)$ に対して，内積 $\overrightarrow{\mathrm{CQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CR}}$ のとりうる値の範囲を求めよ。

2023年度　新潟大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

(1)　$A=\{-1,1\}$，$B=\{1\}$，$A\cap B=\{1\}$，$A\cup B=\{-1,\ 1\}$

(2)　$k=-2,\ -1$

(3)　$n(A\cup B)=\begin{cases} 5 & (k=0) \\ 4 & (k\fallingdotseq -3,\ -2,\ -1,\ 0) \\ 3 & (k=-3) \\ 2 & (k=-2,\ -1) \end{cases}$

2

(1)　$y'=ae^{ax}$，$y'=\dfrac{1}{\sqrt{2x-b}}$

(2)　$b=-\dfrac{1+\log a}{a}$，$\mathrm{P}\left(-\dfrac{\log a}{2a},\ \dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)$

(3)　$\dfrac{2}{3a\sqrt{a}}-\dfrac{1}{a}$

3

(1)　実部：-1，虚部：-1

(2)　$z=\dfrac{-w+2i}{w+4}$

(3)　図示は省略

(4)　最小値：$\dfrac{3}{\sqrt{5}}$ $\left(z=\dfrac{9}{41}+\dfrac{40}{41}i\right)$

4

(1)　$\mathrm{C}(1,\ -1,\ 3)$，$(x-1)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=4$

(2)　最大値：4

(3)　$-2\leqq\overrightarrow{\mathrm{CQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CR}}\leqq 2$