

2023年度 富山大学（前期）**医学部**

試験時間：120 分

 全問必答**1** 次の問いに答えよ。(1) $t = \tan \frac{x}{2}$ ($-\pi < x < \pi$) とおく。このとき、 $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$ であることを示せ。(2) 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}$ を求めよ。(3) 2つの定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+2\sin x}{1+\sin x+\cos x} dx$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+2\cos x}{1+\sin x+\cos x} dx$ が等しいことを示せ。(4) 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+2\sin x}{1+\sin x+\cos x} dx$ を求めよ。(5) 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x} dx$ を求めよ。**2** e を自然対数の底として、 $f(x) = x^2 e^{-\frac{x}{2}}$ ($x \geq 0$) を考える。次の問いに答えよ。ただし、正の整数 n に対して、 $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n e^{-\frac{x}{2}} = 0$ であることは用いてよい。(1) 関数 $y = f(x)$ の増減、およびグラフの凹凸を調べ、グラフをかけ。また、変曲点が2つ以上あれば、それらの y 座標の大小関係も調べよ。ただし、 $2 < e < 3$ であることを用いてもよい。(2) 不定積分 $\int f(x) dx$ を求めよ。(3) a を正の実数とする。 xy 平面において、 $0 \leq y \leq f(x)$, $0 \leq x \leq a$ を満たす部分の面積を $S(a)$ とするとき、 $S(a)$ を a の式で表せ。(4) (3) の $S(a)$ に対して、 $\lim_{a \rightarrow \infty} S(a)$ を求めよ。**3** n を正の整数とし、命題 $P(n)$ を「すべての整数 z に対して、 $z^{3^n} - z^{3^{n-1}}$ は 3^n の倍数である」

とする。次の問いに答えよ。

(1) 命題 $P(1)$ が真であることを示せ。(2) 命題 $P(2)$ が真であることを示せ。(3) すべての正の整数 n に対して、命題 $P(n)$ が真であることを示せ。

2023年度 富山大学（前期）**医学部**

（略解）



証明，図示などは省略

1

(1) 証明は省略

(2) $\log 2$

(3) 証明は省略

(4) $\frac{\pi}{2}$ (5) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \log 2$ **2**(1) 図示は省略，変曲点の大小関係： $f(4 - 2\sqrt{2}) < f(4 + 2\sqrt{2})$ (2) $-2(x^2 + 4x + 8)e^{-\frac{x}{2}} + C$ (C は積分定数)(3) $S(a) = 16 - 2(a^2 + 4a + 8)e^{-\frac{a}{2}}$

(4) 16

3

(1) 証明は省略

(2) 証明は省略

(3) 証明は省略