2023年度　宮崎大学（前期）

医学部　試験時間：120 分

全問必答

1　空間に四面体 OABC があり，$\mathrm{OA}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\mathrm{OB}=2$, $\mathrm{OC}=\sqrt{2}$, $\angle\mathrm{AOB}=60^\circ$, $\angle\mathrm{BOC}=\angle\mathrm{COA}=45^\circ$ とする。点 B から直線 OA におろした垂線の足を D とし，点 C から平面 OAB におろした垂線の足を E とする。また，点 F を，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\overrightarrow{\mathrm{DB}}$ となるように定める。このとき，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$, $\vec{f}=\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ として，次の各問に答えよ。

(1)　$\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$，$\vec{c}\cdot\vec{a}$ の値をそれぞれ求めよ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{DB}}$ を，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。また，$|\overrightarrow{\mathrm{DB}}|$ の値も求めよ。

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{CE}}$ を，$\vec{a}$，$\vec{c}$，$\vec{f}$ を用いて表せ。

(4)　四面体 OACF の体積を求めよ。

2　表に A，裏に B と書かれたコインがある。このコインを n 回投げる試行を行い，A が出た回数と同じ枚数のイヌの絵はがき，B が出た回数と同じ枚数のネコの絵はがきを貰えるとする。例えば，$n=3$ のとき，ABA と出たら，イヌの絵はがきを 2 枚，ネコの絵はがきを 1 枚貰える。このとき，次の各問に答えよ。ただし，使用するコインは，表，裏がそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ の確率で出るものとする。

(1)　$n=3$ のとき，イヌの絵はがきを 2 枚以上貰える確率を求めよ。

(2)　$n=3$ のとき，イヌとネコのどちらの絵はがきも貰える確率を求めよ。

(3)　$n\geqq 3$ のとき，A が連続して 3 回以上出たら，貰えるイヌやネコの絵はがきに追加してウシの絵はがきも貰えることにする。$n=6$ のとき，イヌ，ネコ，ウシのいずれの絵はがきも貰える確率を求めよ。

3　座標平面上に 2 点 A$(-1,\ 0)$，B$(1,\ 0)$ がある。また，点 P$(x,\ y)$ が $x>1$，$y>0$ を満たしながら座標平面上を動くとする。このとき，次の各問に答えよ。

(1)　$\tan\dfrac{\pi}{12}$ の値を求めよ。

(2)　$\tan\angle\mathrm{APB}$ を，x と y を用いて表せ。

(3)　点 P が $x>1$，$y>0$，$\angle\mathrm{APB}\leqq\dfrac{\pi}{12}$ を満たしながらくまなく動くとき，点 P の動きうる領域を座標平面上に図示せよ。

4　自然数 $k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ と $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ に対して，$\theta_k(n)$ を，
$\theta_k(n)=\left(1-\dfrac{k}{n}\right)\dfrac{\pi}{2}$ で定め，座標平面上の円 C_n と直線 $L_{k,n}$ をそれぞれ，

$$C_n : x^2+y^2=\frac{1}{n^2},\quad L_{k,n} : x\sin\theta_k(n)-y\cos\theta_k(n)=0$$

とする。C_n と $L_{k,n}$ との 2 つの交点のうち，x 座標が大きい方の交点の x 座標を $x_k(n)$ とする。このとき，次の各問に答えよ。

(1)　$n \geqq k$ のときの $x_k(n)$ を求めよ。

(2)　次の空欄に当てはまる数または数式を求めよ。

自然数 m に対して，$A_t(m)$ $(t=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ を，

$$A_t(m)=\sum_{k=1}^{m}x_k(k+t)$$

とし，B_N $(N=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を，

$$B_N=\sum_{t=0}^{N-1}A_t(N-t)$$

とする。このとき，$A_1(1)=\dfrac{\boxed{\text{あ}}}{4}$，　$A_2(1)=\dfrac{\boxed{\text{い}}}{6}$ となる。

また，$B_2-B_1=\dfrac{\boxed{\text{う}}}{4}$，　$B_3-B_2=\dfrac{\boxed{\text{え}}}{6}$ となる。

さらに，$N=2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots$ に対して，

$$B_N-B_{N-1}=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\boxed{\text{お}}$$

となる。

(3)　(2) で定めた B_N $(N=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ について，$\displaystyle\lim_{N\to\infty}(B_N-B_{N-1})$ の値を求めよ。

5　次の各問に答えよ。ただし，$\log x$ は x の自然対数を表す。

(1)　$a>1$ を満たす定数 a と，区間 $\dfrac{1}{a}\leqq x\leqq a$ において連続な関数 $f(x)$ に対して，等式

$$\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{f(x)}{1+x^2}\,dx=\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{1+x^2}\,dx$$

が成り立つことを示せ。

(2)　定積分 $I=\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{1+x}{x(1+x^2)}\,dx$ の値を求めよ。

(3)　関数 $g(x)=\dfrac{\log x}{1+x^2}$ は，区間 $0<x\leqq\sqrt{e}$ においてつねに増加することを示せ。

(4)　(3) の関数 $g(x)$ に対して，$y=g(x)$ $(x>0)$ のグラフを C とする。曲線 C と x 軸および直線 $x=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ で囲まれた部分の面積を S_1 とし，曲線 C と x 軸および直線 $x=\sqrt{e}$ で囲まれた部分の面積を S_2 とする。このとき，S_1 と S_2 は等しいことを示せ。

2023年度　宮崎大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

(1)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=2$，$\vec{c}\cdot\vec{a}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{DB}}=-\sqrt{3}\vec{a}+\vec{b}$，$|\overrightarrow{\mathrm{DB}}|=\sqrt{3}$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{CE}}=\sqrt{3}\vec{a}-\vec{c}+\dfrac{1}{3}\vec{f}$

(4)　$\dfrac{\sqrt{6}}{18}$

2

(1)　$\dfrac{1}{2}$　　(2)　$\dfrac{3}{4}$　　(3)　$\dfrac{19}{64}$

3

(1)　$2-\sqrt{3}$　　(2)　$\dfrac{2y}{x^2+y^2-1}$　　(3)　図示は省略

4

(1)　$x_k(n)=\dfrac{1}{n}\cos\left\{\left(1-\dfrac{k}{n}\right)\dfrac{\pi}{2}\right\}$

(2)　あ：$\sqrt{2}$，い：1，う：$2+\sqrt{2}$，え：$3+\sqrt{3}$，お：$\cos\left\{\left(1-\dfrac{k}{n}\right)\dfrac{\pi}{2}\right\}$

(3)　$\dfrac{2}{\pi}$

5

(1)　証明は省略　　(2)　$\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{1}{2}\log 3$

(3)　証明は省略　　(4)　証明は省略