# 2023年度　大阪大学（前期）

## 医学部　試験時間：150 分

全問必答

**1**　$n$ を 2 以上の自然数とする。

(1)　$0 \leqq x \leqq 1$ のとき，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{1}{2}x^n \leqq (-1)^n\left\{\frac{1}{x+1}-1-\sum_{k=2}^{n}(-x)^{k-1}\right\} \leqq x^n - \frac{1}{2}x^{n+1}$$

(2)　$a_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ とするとき，次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n n(a_n - \log 2)$$

**2**　平面上の 3 点 O，A，B が

$$\left|2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right| = 1 \quad \text{かつ} \quad \left(2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) = \frac{1}{3}$$

をみたすとする。

(1)　$\left(2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$ を求めよ。

(2)　平面上の点 P が

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\right| \leqq \frac{1}{3} \quad \text{かつ} \quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\left(2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) \leqq \frac{1}{3}$$

をみたすように動くとき，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|$ の最大値と最小値を求めよ。

**3**　P を座標平面上の点とし，点 P の座標を $(a,\ b)$ とする。$-\pi \leqq t \leqq \pi$ の範囲にある実数 $t$ のうち，曲線 $y = \cos x$ 上の点 $(t,\ \cos t)$ における接線が点 P を通るという条件をみたすものの個数を $N(\mathrm{P})$ とする。$N(\mathrm{P}) = 4$ かつ $0<a<\pi$ をみたすような点 P の存在範囲を座標平面上に図示せよ。

**4**　$a$，$b$ を $a^2+b^2>1$ かつ $b \neq 0$ をみたす実数の定数とする。座標空間の点 $\mathrm{A}(a,\ 0,\ b)$ と点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ 0)$ をとる。点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$ を通り直線 AP と垂直な平面を $\alpha$ とし，平面 $\alpha$ と直線 AP との交点を Q とする。

(1)　$\left(\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AO}}\right)^2 = |\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|^2$ が成り立つことを示せ。

(2)　$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}| = 1$ をみたすように点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ 0)$ が $xy$ 平面上を動くとき，点 P の軌跡を求めよ。

**5**　1 個のさいころを $n$ 回投げて，$k$ 回目に出た目を $a_k$ とする。$b_n$ を

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} a_1^{n-k}a_k$$

により定義し，$b_n$ が 7 の倍数となる確率を $p_n$ とする。

(1)　$p_1$，$p_2$ を求めよ。

(2)　数列 $\{p_n\}$ の一般項を求めよ。

# 2023年度　大阪大学（前期）

## 医学部　（略解）

証明，図示などは省略

**1**

（1）　証明は省略

（2）　$-\frac{1}{2}$

**2**

（1）　0

（2）　最大値：$\frac{\sqrt{5}}{3}$，最小値：$\frac{\sqrt{2}-1}{3}$

**3**　図示は省略

**4**

（1）　証明は省略

（2）　$0<b^2<1$ のとき，双曲線：$\frac{(1-b^2)^2}{b^2(a^2+b^2-1)}\left(x-\frac{a}{1-b^2}\right)^2-\frac{1-b^2}{b^2}y^2=1$

$b^2=1$ のとき，放物線：$y^2=-\frac{2}{a}x+1+\frac{1}{a^2}$

$b^2>1$ のとき，楕円：$\frac{(b^2-1)^2}{b^2(a^2+b^2-1)}\left(x+\frac{a}{b^2-1}\right)^2+\frac{b^2-1}{b^2}y^2=1$

**5**

（1）　$p_1=0$，$p_2=\frac{1}{6}$

（2）　$p_n=\frac{1}{7}\left\{1-\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right\}$