

2023年度 大阪公立大学（前期）

医学部

試験時間：120 分

 全問必答

1 A, B の 2 人が階段の一番下の段にいる。2 人はじゃんけんをして、下記のルールに従い階段を移動するゲームを繰り返し行う。

- A は勝ったら 1 段のぼり、あいこか負けた場合、同じ段にとどまる。
- B はグー、チョキで勝ったら 1 段のぼり、パーで勝ったら 3 段のぼる。また、あいこか、グー、チョキで負けた場合、同じ段にとどまる。パーで負けたら階段の一番下の段まで戻る（すでに一番下の段にいる場合はとどまる）。

A, B ともに、 $\frac{1}{3}$ ずつの確率でグー、チョキ、パーを出すものとし、すべての試行は独立とする。2 回目以降のゲームは、2 人とも直前のゲームでの移動を終えた位置で行うものとする。階段の一番下の段を 0 段目とし、そこから m 段のぼった段を m 段目とする。次の問いに答えよ。

- (1) n は自然数とし、 m は $0 \leq m \leq n$ である整数とする。 n 回のゲームを終えた結果、A が m 段目にいる確率 $x_{n,m}$ を求めよ。
- (2) m は 0 以上の整数とする。2 回のゲームを終えた結果、B が m 段目にいる確率 y_m を求めよ。
- (3) n は自然数とする。 n 回のゲームを終えた結果、B が 0 段目にいる確率 z_n を求めよ。

2 i は虚数単位を表すものとする。複素数 z に関する方程式

$$z = \left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right) \bar{z}$$

の表す複素数平面上的図形を ℓ とする。次の問いに答えよ。

- (1) ℓ は直線であることを証明せよ。
- (2) 直線 ℓ に関して複素数 w と対称な点を w の式で表せ。
- (3) 複素数 z に対して、 z を点 1 を中心に反時計回りに $\frac{2\pi}{3}$ 回転した点を z_1 とし、次に z_1 を原点を中心に反時計回りに $\frac{2\pi}{3}$ 回転した点を z_2 とする。さらに、直線 ℓ に関して z_2 と対称な点を $f(z)$ とする。 $f(z)$ を z の式で表せ。
- (4) $f(z)$ は (3) のとおりとする。複素数 z に関する方程式

$$f(z) = -z - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

の表す複素数平面上的図形を図示せよ。

3 次の問いに答えよ。

- (1) a, b は実数とし, $f(x)$ は a, b が属する开区間で定義された関数とする。 $f(x)$ が連続な第 2 次導関数 $f''(x)$ をもつとき, 次の等式を証明せよ。

$$\int_a^b (b-x)(x-a)f''(x) dx = (b-a)(f(a) + f(b)) - 2 \int_a^b f(x) dx$$

- (2) t を正の実数とする。次の不等式を証明せよ。

$$0 \leq \int_t^{t+1} \log x dx - \frac{1}{2}(\log t + \log(t+1)) \leq \frac{1}{8} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right)$$

- (3) 次で定まる数列 $\{a_n\}$ に対し, 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\log n}$ を求めよ。

$$a_n = \log(n!) - n \log n + n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

4 p は素数とする。次の問いに答えよ。

- (1) j を $0 < j < p$ である整数とすると, 二項係数 ${}_p C_j$ は p で割り切れることを示せ。
- (2) 自然数 m に対して $(m+1)^p - m^p - 1$ は p で割り切れることを示せ。
- (3) 自然数 m に対して $m^p - m$ は p で割り切れることを示せ。さらに m が p で割り切れないときには, $m^{p-1} - 1$ が p で割り切れることを示せ。

ここで, 次の集合 S を考える。

$$S = \{4n^2 + 4n - 1 \mid n \text{ は自然数}\}$$

例えば, $n = 22$ とすると $4n^2 + 4n - 1 = 2023$ なので 2023 は S に属する。次の問いに答えよ。

- (4) 整数 a が S に属し, $a = 4n^2 + 4n - 1$ (n は自然数) と表されているとする。このとき, a と $2n+1$ は互いに素であることを示せ。
- (5) p は 3 以上の素数とする。 p が S に属するある整数 a を割り切るならば, $2^{\frac{p-1}{2}} - 1$ は p で割り切れることを示せ。

2023年度 大阪公立大学（前期）**医学部**

（略解）

 証明，図示などは省略**1**

$$(1) \quad x_{n,m} = {}_nC_m \left(\frac{1}{3}\right)^m \left(\frac{2}{3}\right)^{n-m}$$

$$(2) \quad y_0 = \frac{13}{27}, y_1 = \frac{22}{81}, y_2 = \frac{4}{81}, y_3 = \frac{11}{81}, y_4 = \frac{4}{81}, y_5 = 0, y_6 = \frac{1}{81}$$

$m \geq 7$ のとき, $y_m = 0$

$$(3) \quad z_n = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(\frac{5}{9}\right)^n$$

2

(1) 証明は省略

$$(2) \quad \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\overline{w}$$

(3) 図示は省略

3

(1) 証明は省略

(2) 証明は省略

$$(3) \quad \frac{1}{2}$$

4

(1) 証明は省略

(2) 証明は省略

(3) 証明は省略

(4) 証明は省略

(5) 証明は省略