2023 年度　京都大学（前期）

医学部　試験時間：150 分

全問必答

1　次の各問に答えよ。

(1)　定積分 $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{x}\log(x^2)\,dx$ の値を求めよ。

(2)　整式 $x^{2023}-1$ を整式 $x^4+x^3+x^2+x+1$ で割ったときの余りを求めよ。

2　空間内の 4 点 O，A，B，C は同一平面上にないとする。点 D，P，Q を次のように定める。点 D は $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}+3\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を満たし，点 P は線分 OA を 1：2 に内分し，点 Q は線分 OB の中点である。さらに，直線 OD 上の点 R を，直線 QR と直線 PC が交点を持つように定める。このとき，線分 OR の長さと線分 RD の長さの比 OR：RD を求めよ。

3　n を自然数とする。1 個のさいころを n 回投げ，出た目を順に X_1，X_2，……，X_n とし，n 個の数の積 $X_1X_2\cdots\cdots X_n$ を Y とする。

(1)　Y が 5 で割り切れる確率を求めよ。

(2)　Y が 15 で割り切れる確率を求めよ。

4　次の関数 $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ。

$$f(x)=e^{-x^2}+\frac{1}{4}x^2+1+\frac{1}{e^{-x^2}+\frac{1}{4}x^2+1}\qquad(-1\leqq x\leqq 1)$$

ただし，e は自然対数の底であり，その値は $e=2.71\cdots\cdots$ である。

5　O を原点とする xyz 空間において，点 P と点 Q は次の 3 つの条件 (a)，(b)，(c) を満たしている。

(a)　点 P は x 軸上にある。

(b)　点 Q は yz 平面上にある。

(c)　線分 OP と線分 OQ の長さの和は 1 である。

点 P と点 Q が条件 (a)，(b)，(c) を満たしながらくまなく動くとき，線分 PQ が通過してできる立体の体積を求めよ。

6　p を 3 以上の素数とする。また，θ を実数とする。

(1)　$\cos 3\theta$ と $\cos 4\theta$ を $\cos\theta$ の式として表せ。

(2)　$\cos\theta=\dfrac{1}{p}$ のとき，$\theta=\dfrac{m}{n}\cdot\pi$ となるような正の整数 m，n が存在するか否かを理由を付けて判定せよ。

2023 年度　京都大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

(1) $\dfrac{64}{3}\log 2-\dfrac{56}{9}$

(2) x^3-1

2 $\mathrm{OR}:\mathrm{RD}=1:9$

3

(1) $1-\left(\dfrac{5}{6}\right)^n$

(2) $1-\left(\dfrac{5}{6}\right)^n-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

4 最大値：$\dfrac{5}{2}$，最小値：$\dfrac{41e^2+40e+16}{20e^2+16e}$

5 $\dfrac{2}{15}\pi$

6

(1) $\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$

$\cos 4\theta=8\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1$

(2) 存在しない。理由は省略