2022年度　東北大学（前期）

医学部　試験時間：150 分

全問必答

1　K を 3 より大きな奇数とし，$l+m+n=K$ を満たす正の奇数の組 $(l,\ m,\ n)$ の個数 N を考える。ただし，たとえば，$K=5$ のとき，$(l,\ m,\ n)=(1,\ 1,\ 3)$ と $(l,\ m,\ n)=(1,\ 3,\ 1)$ とは異なる組とみなす。

(1)　$K=99$ のとき，N を求めよ。

(2)　$K=99$ のとき，$l,\ m,\ n$ の中に同じ奇数を 2 つ以上含む組 $(l,\ m,\ n)$ の個数を求めよ。

(3)　$N>K$ を満たす最小の K を求めよ。

2　a を実数とし，実数 x の関数 $f(x)=(x^2+3x+a)(x+1)^2$ を考える。

(1)　$f(x)$ の最小値が負となるような a のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　$a<2$ のとき，$f(x)$ は 2 つの極小値をもつ。このとき，$f(x)$ が極小となる x の値を $\alpha_1,\ \alpha_2\ (\alpha_1<\alpha_2)$ とする。$f(\alpha_1)<f(\alpha_2)$ を示せ。

(3)　$f(x)$ が $x<\beta$ において単調減少し，かつ，$x=\beta$ において最小値をとるとする。このとき，a のとりうる値の範囲を求めよ。

3　正の整数 n に対して，

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)$$

とする。

(1)　正の実数 x に対して，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{x}{2+x}\leqq\sqrt{1+x}-1\leqq\frac{x}{2}$$

(2)　極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n$ を求めよ。

4　xy 平面の第 1 象限内において，直線 $\ell : y=mx\ (m>0)$ と x 軸の両方に接している半径 a の円を C とし，円 C の中心を通る直線 $y=tx\ (t>0)$ を考える。

また，直線 ℓ と x 軸，および，円 C のすべてにそれぞれ 1 点で接する円の半径を b とする。ただし，$b>a$ とする。

(1)　m を用いて t を表せ。

(2)　t を用いて $\dfrac{b}{a}$ を表せ。

(3)　極限値 $\displaystyle\lim_{m\to+0}\frac{1}{m}\left(\frac{b}{a}-1\right)$ を求めよ。

5　座標空間内において，ベクトル

$$\overrightarrow{a}=(1,\ 2,\ 1),\ \ \overrightarrow{b}=(1,\ 1,\ -1),\ \ \overrightarrow{c}=(0,\ 0,\ 1)$$

が定める 2 直線

$$\ell : s\overrightarrow{a},\ \ \ell' : t\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}\qquad (s,\ t \text{ は実数})$$

を考える。点 A_1 を原点 $(0, 0, 0)$ とし，点 A_1 から直線 ℓ' に下ろした垂線を A_1B_1 とおく。次に，点 $B_1(t_1\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})$ から直線 ℓ に下ろした垂線を B_1A_2 とおく。同様に，点 $A_k(s_k\overrightarrow{a})$ から直線 ℓ' に下ろした垂線を A_kB_k，点 $B_k(t_k\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})$ から直線 ℓ に下ろした垂線を B_kA_{k+1} とする手順を繰り返して，点 $A_n(s_n\overrightarrow{a})$，$B_n(t_n\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})$（$n$ は正の整数）を定める。

(1)　s_n を用いて s_{n+1} を表せ。

(2)　極限値 $S=\lim_{n\to\infty} s_n$，$T=\lim_{n\to\infty} t_n$ を求めよ。

(3)　(2) で求めた S，T に対して，点 A，B をそれぞれ $A(S\overrightarrow{a})$，$B(T\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})$ とおくと，直線 AB は 2 直線 ℓ，ℓ' の両方と直交することを示せ。

6　半径 1 の円を底面とする高さが $\sqrt{3}$ の直円柱と，半径が r の球を考える。直円柱の底面の円の中心と球の中心が一致するとき，直円柱の内部と球の内部の共通部分の体積 $V(r)$ を求めよ。

2022年度　東北大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

（1）$N = 1225$　　（2）73（個）　　（3）$K = 9$

2

（1）$a < \dfrac{9}{4}$　　（2）証明は省略　　（3）$a \leqq \dfrac{9}{4}$，$\dfrac{73}{32} \leqq a$

3

（1）証明は省略　　（2）$\dfrac{1}{4}$

4

（1）$t = \dfrac{-1 + \sqrt{1 + m^2}}{m}$　　（2）$\dfrac{b}{a} = 1 + 2t^2 + 2t\sqrt{1 + t^2}$　　（3）1

5

（1）$s_{n+1} = \dfrac{2}{9} s_n + \dfrac{5}{18}$　　（2）$S = \dfrac{5}{14}$，$T = \dfrac{4}{7}$　　（3）証明は省略

6

$$V(r) = \begin{cases} \dfrac{2}{3}\pi r^3 & (0 < r \leqq 1) \\ \dfrac{2}{3}\pi \left\{ r^3 - (r^2 - 1)\sqrt{r^2 - 1} \right\} & (1 \leqq r \leqq \sqrt{3}) \\ \pi(r^2 - 1)\left(\sqrt{3} - \dfrac{2}{3}\sqrt{r^2 - 1}\right) & (\sqrt{3} \leqq r \leqq 2) \\ \sqrt{3}\pi & (2 \leqq r) \end{cases}$$