2022年度　東京大学（前期）

医学部　試験時間：150 分

全問必答

1　次の関数 $f(x)$ を考える。

$$f(x) = (\cos x)\log(\cos x) - \cos x + \int_0^x (\cos t)\log(\cos t)\,dt \quad \left(0 \leqq x < \frac{\pi}{2}\right)$$

(1)　$f(x)$ は区間 $0 \leqq x < \frac{\pi}{2}$ において最小値を持つことを示せ。

(2)　$f(x)$ の区間 $0 \leqq x < \frac{\pi}{2}$ における最小値を求めよ。

2　数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = {a_n}^2 + 1 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(1)　正の整数 n が 3 の倍数のとき，a_n は 5 の倍数となることを示せ。

(2)　k，n を正の整数とする。a_n が a_k の倍数となるための必要十分条件を k，n を用いて表せ。

(3)　a_{2022} と $(a_{8091})^2$ の最大公約数を求めよ。

3　O を原点とする座標平面上で考える。座標平面上の 2 点 $\mathrm{S}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{T}(x_2,\ y_2)$ に対し，点 S が点 T から十分離れているとは，

$$|x_1 - x_2| \geqq 1 \text{ または } |y_1 - y_2| \geqq 1$$

が成り立つことと定義する。

不等式

$$0 \leqq x \leqq 3,\ 0 \leqq y \leqq 3$$

が表す正方形の領域を D とし，その 2 つの頂点 $\mathrm{A}(3,\ 0)$，$\mathrm{B}(3,\ 3)$ を考える。さらに，次の条件 (i)，(ii) をともに満たす点 P をとる。

(i)　点 P は領域 D の点であり，かつ，放物線 $y = x^2$ 上にある。

(ii)　点 P は，3 点 O，A，B のいずれからも十分離れている。

点 P の x 座標を a とする。

(1)　a のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　次の条件 (iii)，(iv) をともに満たす点 Q が存在しうる範囲の面積 $f(a)$ を求めよ。

(iii)　点 Q は領域 D の点である。

(iv)　点 Q は，4 点 O，A，B，P のいずれからも十分離れている。

(3)　a は (1) で求めた範囲を動くとする。(2) の $f(a)$ を最小にする a の値を求めよ。

4　座標平面上の曲線

$$C : y = x^3 - x$$

を考える。

(1)　座標平面上のすべての点 P が次の条件 (i) を満たすことを示せ。

　(i)　点 P を通る直線 ℓ で，曲線 C と相異なる 3 点で交わるものが存在する。

(2)　次の条件 (ii) を満たす点 P のとりうる範囲を座標平面上に図示せよ。

　(ii)　点 P を通る直線 ℓ で，曲線 C と相異なる 3 点で交わり，かつ，直線 ℓ と曲線 C で囲まれた 2 つの部分の面積が等しくなるものが存在する。

5　座標空間内の点 A(0, 0, 2) と点 B(1, 0, 1) を結ぶ線分 AB を z 軸のまわりに 1 回転させて得られる曲面を S とする。S 上の点 P と xy 平面上の点 Q が PQ $= 2$ を満たしながら動くとき，線分 PQ の中点 M が通過しうる範囲を K とする。K の体積を求めよ。

6　O を原点とする座標平面上で考える。0 以上の整数 k に対して，ベクトル $\overrightarrow{v_k}$ を

$$\overrightarrow{v_k} = \left(\cos\frac{2k\pi}{3}, \sin\frac{2k\pi}{3}\right)$$

と定める。投げたとき表と裏がどちらも $\frac{1}{2}$ の確率で出るコインを N 回投げて，座標平面上に点 X_0，X_1，X_2，……，X_N を以下の規則 (i)，(ii) に従って定める。

(i)　X_0 は O にある。

(ii)　n を 1 以上 N 以下の整数とする。X_{n-1} が定まったとし，X_n を次のように定める。

- n 回目のコイン投げで表が出た場合，

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}_n} = \overrightarrow{\mathrm{OX}_{n-1}} + \overrightarrow{v_k}$$

　により X_n を定める。ただし，k は 1 回目から n 回目までのコイン投げで裏が出た回数とする。

- n 回目のコイン投げで裏が出た場合，X_n を X_{n-1} と定める。

(1)　$N = 8$ とする。X_8 が O にある確率を求めよ。

(2)　$N = 200$ とする。X_{200} が O にあり，かつ，合計 200 回のコイン投げで表がちょうど r 回出る確率を p_r とおく。ただし，$0 \leqq r \leqq 200$ である。p_r を求めよ。また，p_r が最大となる r の値を求めよ。

Ⓒ 大学受験・数学塾　管理人：makoto

2022 年度　東京大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

（1）　証明は省略

（2）　最小値：$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\log 2-\sqrt{2}+\log(1+\sqrt{2})$

2

（1）　証明は省略

（2）　n が k の倍数

（3）　5

3

（1）　$1 \leqq a \leqq \sqrt{3}$

（2）　$f(a)=\begin{cases} a^3-2a^2-a+5 & (1 \leqq a \leqq \sqrt{2}) \\ 2a^2+a-3 & (\sqrt{2}<a \leqq \sqrt{3}) \end{cases}$

（3）　$\sqrt{2}$

4

（1）　証明は省略

（2）　図示は省略

5　$\dfrac{4}{3}\pi^2-2\sqrt{3}\pi$

6

（1）　$\dfrac{5}{128}$

（2）　$p(r)=\begin{cases} 0 & (r \text{ が } 3 \text{ の倍数でないとき}) \\ \dfrac{({}_{66}\mathrm{C}_s)^3}{2^{200}} & (r \text{ が } 3 \text{ の倍数 } 3s \text{ のとき}) \end{cases}$

（3）　$r=99$