2022 年度　東京医科歯科大学（前期）

医学部　試験時間：90 分

全問必答

1　n を自然数とする。整数 i，j に対し，xy 平面上の点 $\mathrm{P}_{i,\,j}$ の座標を

$$\left(\cos\frac{2\pi}{n}i+\cos\frac{2\pi}{n}j,\ \sin\frac{2\pi}{n}i+\sin\frac{2\pi}{n}j\right)$$

で与える。さらに，i，j を動かしたとき，$\mathrm{P}_{i,\,j}$ の取り得る異なる座標の個数を S_n とする。このとき，以下の各問いに答えよ。

(1)　$n=3$ のとき，$\triangle \mathrm{P}_{0,\,0}\mathrm{P}_{0,\,1}\mathrm{P}_{0,\,2}$ および $\triangle \mathrm{P}_{1,\,0}\mathrm{P}_{1,\,1}\mathrm{P}_{1,\,2}$ を同一座標平面上に図示せよ。

(2)　S_4 を求めよ。

(3)　平面上の異なる 2 点 A，B に対して，$\mathrm{AQ}=\mathrm{BQ}=1$ であるような同一平面上の点 Q はいくつあるか。$\mathrm{AB}=d$ の値で場合分けして答えよ。

(4)　S_n を n を用いて表せ。

2　xy 平面上の放物線 $P: y^2=4x$ 上に異なる 2 点 A，B をとり，A，B それぞれにおいて P への接線と直交する直線を n_A，n_B とする。a を正の数として，点 A の座標を $(a,\,\sqrt{4a})$ とするとき，以下の各問いに答えよ。

(1)　n_A の方程式を a を用いて表せ。

(2)　直線 AB と直線 $y=\sqrt{4a}$ とがなす角の 2 等分線のひとつが，n_A に一致するとき，直線 AB の方程式を a を用いて表せ。

(3)　(2) のとき，点 B を通る直線 r_B を考える。r_B と直線 AB とがなす角の 2 等分線のひとつが，n_B に一致するとき，r_B の方程式を a を用いて表せ。

(4)　(3) のとき，直線 AB と放物線 P で囲まれた図形の面積を S_1 とし，P と直線 $y=\sqrt{4a}$，直線 $x=-1$ および (3) の r_B で囲まれた図形の面積を S_2 とする。a を変化させたとき，$\dfrac{S_1}{S_2}$ の最大値を求めよ。

3　曲線 $C: y=f(x)$ $(0\leqq x<1)$ が次の条件を満たすとする。

- $f(0)=0$
- $0<x<1$ のとき $f'(x)>0$
- $0<a<1$ を満たすすべての実数 a について，曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(a,\,f(a))$ における接線と直線 $x=1$ との交点を Q とするとき，$\mathrm{PQ}=1$

このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　$f'(x)$ を求めよ。

(2)　$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x)f'(x)\,dx$ の値を求めよ。

(3)　曲線 C と x 軸，直線 $x=1$，直線 $y=f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

2022 年度　東京医科歯科大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

(1)　図示は省略

(2)　9

(3)
$$\begin{cases} 0<d<2 \text{ のとき} & 2 \text{ 個} \\ d=2 \text{ のとき} & 1 \text{ 個} \\ d>2 \text{ のとき} & 0 \text{ 個} \end{cases}$$

(4)
$$\begin{cases} n \text{ が奇数のとき} & \dfrac{n^2+n}{2} \\ n \text{ が偶数のとき} & \dfrac{n^2+2}{2} \end{cases}$$

2

(1)　$x+\dfrac{y}{\sqrt{a}}-a-2=0$

(2)　$2\sqrt{a}(x-1)-(a-1)y=0$

(3)　$y=-\dfrac{2}{\sqrt{a}}$

(4)　$\dfrac{1}{2}$

3

(1)　$f'(x)=\dfrac{\sqrt{2x-x^2}}{1-x}$

(2)　$\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{8}$

(3)　$\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{8}$