2022 年度　旭川医科大学（前期）

医学部　試験時間：120 分

全問必答

1　$\triangle$OAB において，3 辺の長さをそれぞれ $\mathrm{OA}=1$，$\mathrm{OB}=\sqrt{2}$，$\mathrm{AB}=\sqrt{3}$ とし，辺 AB を $\mathrm{AL}:\mathrm{LB}=1:2$ と内分する点を L とする。辺 OA 上に $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=m\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ となる点 P，辺 OB 上に $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=n\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となる点 Q をとる。P と Q は $\angle\mathrm{PLQ}=\dfrac{\pi}{2}$ を満たすように動き，AQ と BP との交点を R とする。このとき，次の各問いに答えよ。ただし，$0<m<1$，$0<n<1$ とする。

(1)　$m+n$ の値は一定であることを示し，その値を求めよ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ および m を用いて表せ。

(3)　$\triangle$PRQ の面積 S のとりうる値の範囲を求めよ。

2　$0\leqq x\leqq 1$ の範囲で連続な関数 $f(x)$ について，数列 $\{g_n\}$ を

$$g_n=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k}{n}+\frac{1}{2n}}f(x)\,dx,\quad n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

と定める。次の各問いに答えよ。ただし，a，b，c，p，q，α，β は 0 でない定数とし，e は自然対数の底である。

(1)　$f(x)=ax^2+bx+c$ のとき，g_n を求めよ。

(2)　$f(x)=e^{\alpha x}$ のとき，g_n を求めよ。

(3)　$I=\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ とおく。このとき，$f(x)=pe^{\alpha x}+qe^{\beta x}+ax^2+bx+c$ について，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}g_n$ を I を用いて表せ。

3　1 から 30 までの自然数について，次の各問いに答えよ。

(1)　この 30 個の自然数のうち，次の数はいくつあるか。

(i)　4 の倍数または 6 の倍数

(ii)　2 の倍数であるが 4 でも 6 でも割り切れない数

(2)　この 30 個の自然数から互いに異なる 2 数を選ぶとき，次の選び方は何通りあるか。

(i)　少なくとも一方の数が 12 の倍数となる選び方

(ii)　2 つの数の積が 12 の倍数となる選び方

4　a，b は正の実数で $a>b$ とし，α は $\tan\alpha=\dfrac{b}{a}$ を満たす角とする。ただし，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$ とする。このとき，次の (1) と (2) に答えよ。

(1)　座標平面上に原点 O を中心とし，半径が a で中心角は $\dfrac{\pi}{2}$ より小さい扇形 BOA がある。ただし，点 A の座標は $(a,\ 0)$ であり，点 B は第 1 象限にある。この扇形を y 軸方向に $\dfrac{b}{a}$ 倍に縮小した図形を COA で表す。ここで点 C は，点 B の座標を $(x_0,\ y_0)$ としたときに座標が $\left(x_0,\ \dfrac{b}{a}y_0\right)$ となる点であり，$\angle\mathrm{COA}=\dfrac{\pi}{4}$ とする。図形 COA は図 1 の灰色部分である。

(i)　扇形 BOA の中心角 $\angle\mathrm{BOA}$ を α を用いて表せ。

(ii)　図形 COA の面積を a，b，α を用いて表せ。

(iii)　図形 COA を楕円 $\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$ によって 2 つの図形に分けたとき，原点 O を含む方の図形の面積を m，点 A を含む方の図形の面積を n とする。m と n を a，b，α を用いてそれぞれ表せ。

(2)　座標平面上で次の不等式の表す 4 つの領域を考える。

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqq 1$ の表す領域を U_0，$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\geqq 1$ の表す領域を U_1

$\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}\leqq 1$ の表す領域を V_0，$\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}\geqq 1$ の表す領域を V_1

とする。さらに $S=U_0\cap V_0$，$T=(U_0\cap V_1)\cup(U_1\cap V_0)$ の面積をそれぞれ s，t とする。図 2 において，灰色部分が領域 S，4 つの斜線部分が領域 T である。

(i)　$s=t$ となるときの α の値を求めよ。

(ii)　a，b が $a^2+b^2=1$ を満たしながら変化するとき，$S\cup T$ の面積が最大となる α の値を α_0 とする。$\alpha=\alpha_0$ のとき，s と t の大小を比較せよ。

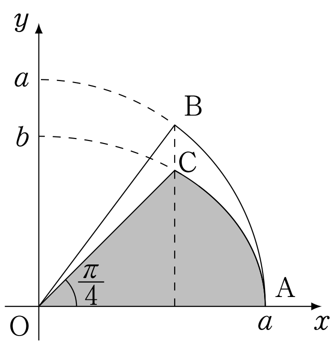

図 1

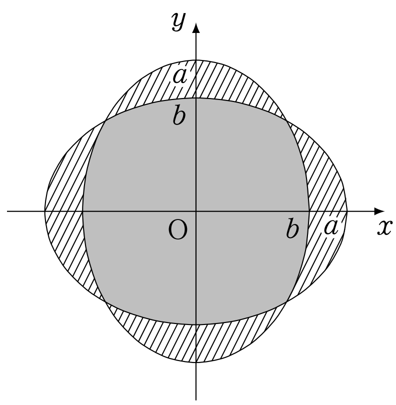

図 2

2022 年度　旭川医科大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

(1)　証明は省略，$m+n=1$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{m^2}{m^2-m+1}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{(m-1)^2}{m^2-m+1}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

(3)　$0<S\leqq\dfrac{\sqrt{2}}{24}$

2

(1)　$g_n=\dfrac{4n-3}{24n}a+\dfrac{2n-1}{8n}b+\dfrac{c}{2}$

(2)　$g_n=\dfrac{e^{\alpha}-1}{\alpha\left(e^{\frac{\alpha}{2n}}+1\right)}$

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}g_n=\frac{1}{2}I$

3

(1)　(i) 10 個　　(ii) 5 個

(2)　(i) 57 通り　　(ii) 115 通り

4

(1)　(i) $\angle\mathrm{BOA}=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$　　(ii) $\dfrac{1}{4}ab(\pi-2\alpha)$　　(iii) $m=\dfrac{1}{2}ab\alpha,\ n=\dfrac{1}{4}ab(\pi-4\alpha)$

(2)　(i) $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$　　(ii) $s>t$