2022 年度　岡山大学（前期）

医学部　試験時間：120 分

全問必答

1　A，B，C の 3 人で次のルールに従って一連の試合を行い，優勝者を決定する。

- 1 試合目は A と B が戦う。
- 自然数 n に対し，$n+1$ 試合目は n 試合目の勝者と n 試合目に戦わなかった人が戦う。
- 2 連勝した人が出た時点で，その人が優勝者となり，以後試合は行わない。
- すべての試合において，引き分けはないものとする。

A，B，C が互いに戦う際の勝率は次の通りとする。ただし，p は $0<p<1$ を満たす実数とする。

- A と B の試合：勝つ確率は A と B のどちらも $\dfrac{1}{2}$ である。
- A と C の試合：A が勝つ確率は $1-p$，C が勝つ確率は p である。
- B と C の試合：B が勝つ確率は $1-p$，C が勝つ確率は p である。

n 試合目で優勝者が決定する確率を a_n とするとき，以下の問いに答えよ。

(1)　a_1，a_2，a_3，a_4 を求めよ。

(2)　自然数 k に対し，a_{3k} を求めよ。

(3)　C が優勝する確率を求めよ。

(4)　1 以上 99 以下の自然数 N に対し $p=\dfrac{N}{100}$ であるとする。このとき C が優勝する確率が $\dfrac{1}{3}$ 以上になるような N の最小値を求めよ。

2　a を実数とし，座標平面上の曲線

$$C : y = x^3 + (a+2)x^2 + 2ax + 2$$

を考える。以下の問いに答えよ。

(1)　a がどのような値をとっても曲線 C は 2 つの定点を通る。その 2 点の座標を求めよ。

(2)　(1) で求めた 2 点のうち，x 座標の小さい方を点 A，もう一方を点 B とし，その 2 点を通る直線を L とする。曲線 C と直線 L が異なる 3 点で交わり，その交点がすべて線分 AB 上にあるような a の値の範囲を求めよ。

(3)　a の値が (2) で求めた範囲にあるとする。このとき，曲線 C と (2) で定めた直線 L が囲まれた部分の面積 $S(a)$ の最小値を求めよ。

3　l を正の実数とし，四面体 OABC において，各辺の長さを

$$\mathrm{OA}=\frac{1}{2}l,\ \mathrm{OB}=\mathrm{OC}=l,\ \mathrm{AB}=\mathrm{CA}=l,\ \mathrm{BC}=\sqrt{2}l$$

とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とし，点 H は $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{8}\vec{b}+\frac{1}{8}\vec{c}$ を満たすとする。以下の問いに答えよ。

(1)　点 H は 3 点 A，B，C が定める平面上に存在することを示せ。

(2)　$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|$ の値を求めよ。

(3)　$\angle\mathrm{OHB}$ の大きさを求めよ。

(4)　四面体 OABC の体積 V を求めよ。

4　$-1<x<1$ に対して

$$f(x)=\log(1+x)+\log(1-x)-x\log(1-x)$$

とおく。ただし，対数は自然対数とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$-1<x<1$ のとき，$f'(x)\geqq 0$ であることを示せ。

(2)　$-1<x<1$，$x\neq 0$ のとき，$\dfrac{f(x)}{x}>0$ であることを示せ。

(3)　n が 2 以上の整数のとき，不等式

$$\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n+1}<\frac{n-1}{n}<\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n}$$

が成り立つことを示せ。

2022年度　岡山大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

(1)　$a_1=0,\ a_2=1-p,\ a_3=p^2,\ a_4=\dfrac{1}{2}p(1-p)$

(2)　$a_{3k}=p^2\left\{\dfrac{p(1-p)}{2}\right\}^{k-1}$　(3)　$\dfrac{2p^2}{2-p+p^2}$　(4)　55

2

(1)　$(0,\ 2),\ (-2,\ 2)$　(2)　$0<a<2$　(3)　最小値：$\dfrac{1}{2}$

3

(1)　証明は省略　(2)　$\dfrac{\sqrt{14}}{8}l$　(3)　90°　(4)　$\dfrac{\sqrt{14}}{48}l^3$

4

(1)　証明は省略　(2)　証明は省略　(3)　証明は省略