2022年度 富山大学 (前期)

医学部

試験時間：120 分

📖 全問必答

1 n は自然数とする。次の問いに答えよ。

- (1) $4^{3n-2} - 1$ を 9 で割ると 3 余ることを示せ。
- (2) $n^3 + 3n^2 + 2n - 3$ は 5 の倍数でないことを示せ。

2 自然数 n に対して

$$I_n = \frac{1}{n} \int_0^\pi (1+x) \sin^n x \, dx$$

とおく。

- (1) I_1 と I_2 を求めよ。答えは値のみを記せばよい。
- (2) $n \geq 3$ のとき、等式 $n^2 I_n = (n-1)(n-2)I_{n-2}$ が成り立つことを示せ。
- (3) $n \geq 2$ のとき、 $I_{n-1} I_n$ を n を用いて表せ。
- (4) $n \geq 2$ のとき、不等式 $I_n < I_{n-1}$ が成り立つことを示せ。
- (5) 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 I_n^2$ を求めよ。

3 a を正の定数として、実数全体で定義された関数

$$f(x) = \frac{x+a}{x^2+3a^2}$$

を考える。

- (1) 関数 $f(x)$ の増減を調べよ。また、関数 $f(x)$ の最大値、最小値、およびそれらを与える x の値を、それぞれ a を用いて表せ。
- (2) 方程式 $f(f(x)) = 0$ が実数解をもつような a の値の範囲を求めよ。
- (3) (2) で求めた a の値の範囲において、関数 $f(f(x))$ の最大値および最小値を、それぞれ a を用いて表せ。

2022年度 富山大学 (前期)

医学部

(略解)

☞ 証明, 図示などは省略

1

(1) 証明は省略

(2) 証明は省略

2

(1) $I_1 = \pi + 2, I_2 = \frac{\pi}{8}(\pi + 2)$

(2) 証明は省略

(3) $I_{n-1}I_n = \frac{\pi(\pi + 2)^2}{2n^2(n - 1)}$

(4) 証明は省略

(5) $\frac{\pi(\pi + 2)^2}{2}$

3

(1) 最大値: $\frac{1}{2a}$ ($x = a$), 最小値: $-\frac{1}{6a}$ ($x = -3a$)

(2) $0 < a \leq \frac{\sqrt{6}}{6}$

(3) 最大値: $\frac{1}{2a}$, 最小値: $\begin{cases} -\frac{1}{6a} & \left(0 < a < \frac{\sqrt{2}}{6}\right) \\ \frac{6a(6a^2 - 1)}{1 + 108a^4} & \left(\frac{\sqrt{2}}{6} \leq a \leq \frac{\sqrt{6}}{6}\right) \end{cases}$