2022年度　宮崎大学（前期）

医学部　試験時間：120 分

全問必答

1　x を実数とするとき，次の不等式を満たす x の値の範囲を求めよ。

$$8^x + 8^{-x} - (4^x + 4^{-x}) - 11 \geqq 0$$

2　1 辺の長さが 1 の正四面体 OABC と点 P が

$$3\overrightarrow{\mathrm{OP}} + 8\overrightarrow{\mathrm{AP}} + 7\overrightarrow{\mathrm{BP}} + \overrightarrow{\mathrm{CP}} = \vec{0}$$

を満たしているとする。直線 OP と平面 ABC の交点を Q とする。このとき，次の各問に答えよ。

(1)　$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ として，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ のそれぞれを，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2)　△ABQ の面積を求めよ。

(3)　△ABC の重心を G とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ と平面 ABC が垂直であることを示せ。

(4)　四面体 PABQ の体積を求めよ。

3　2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を，$a_1 = \dfrac{1}{2}$，$b_1 = 2$，および

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + b_n \\ b_{n+1} = 2a_n + 1 \end{cases} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で定める。このとき，次の各問に答えよ。

(1)　a_2，b_2，a_3，b_3 を求めよ。

(2)　次の式を満たす定数 p，q，r の組を 2 組求めよ。

$$a_{n+1} + pb_{n+1} + q = r(a_n + pb_n + q)(n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

(3)　$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ について，それぞれの第 n 項 a_n，b_n を求めよ。

(4)　2 つの数列 $\{c_n\}$，$\{d_n\}$ を，$c_1 = \sqrt{2}$，$d_1 = 4$，および

$$\begin{cases} c_{n+1} = c_n d_n \\ d_{n+1} = 2c_n^2 \end{cases} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で定める。$\{c_n\}$，$\{d_n\}$ の第 n 項 c_n，d_n について，$c_n^2 d_n$ を求めよ。

4　微分可能な関数 $f(x)$，$g(x)$ が，$g(0)=1$，および

$$f(x)=g(x)+3\int_0^x e^{t-x}f(t)\,dt$$

を満たしているとする。このとき，次の各問に答えよ。

(1)　$f'(x)=2f(x)+h(x)$ を満たす関数 $h(x)$ を，$g(x)$ と $g'(x)$ を用いて表せ。

(2)　$e^{-2x}f(x)$ の導関数を，$g(x)$，$g'(x)$ および e^{-2x} を用いて表せ。

(3)　$e^{-2x}f(x)$ が定数関数のとき，$e^x g(x)$ も定数関数であることを示せ。また，このときの $g(x)$ および $f(x)$ を求めよ。

(4)　$g(x)=x^2+1$ のとき，$f(x)$ を求めよ。

5　袋の中に，1 から 10 までの数が 1 つずつ書かれた 10 枚の札が入っている。これをはじめの状態とする。袋から無作為に 1 枚の札を取り出し，取り出した札は袋の中に戻さないという操作を，はじめの状態から続けて n 回行う。n 回のうち，k 回目（$k=1$，2，……，n）の操作で取り出された札に書かれた数を X_k とする。このとき，次の各問に答えよ。

(1)　$n=6$ のとき，X_1，X_2，……，X_6 の組（X_1，X_2，……，X_6）で，$X_1=1$，$X_2=2$，かつ次の (*) を満たす例を 1 つ挙げよ。

(*) すべての i，j ($i \neq j$) に対して $X_i+X_j \neq 10$

(2)　$n=7$ のとき，次の (**) が必ず成り立つことを示せ。

(**) $X_i+X_j=10$ を満たす i，j ($i \neq j$) が存在する

(3)　$n=3$ のとき，3 回目の操作ではじめて (2) の (**) が成り立つ確率を求めよ。

(4)　$n=4$ のとき，4 回目の操作ではじめて (2) の (**) が成り立つ確率を求めよ。

2022年度　宮崎大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1　$x \leqq \log_2 \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$，$\log_2 \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \leqq x$

2

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{1}{19}(8\vec{a}+7\vec{b}+\vec{c})$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \dfrac{1}{16}(8\vec{a}+7\vec{b}+\vec{c})$

(2)　$\dfrac{\sqrt{3}}{64}$　(3)　証明は省略　(4)　$\dfrac{\sqrt{2}}{1216}$

3

(1)　$a_2 = \dfrac{5}{2}$，$b_2 = 2$，$a_3 = \dfrac{9}{2}$，$b_3 = 6$

(2)　$(p,\ q,\ r) = \left(-1,\ \dfrac{1}{2},\ -1\right)$，$\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2},\ 2\right)$

(3)　$a_n = \dfrac{1}{3}\cdot 2^{n+1} + \dfrac{1}{3}\cdot(-1)^n - \dfrac{1}{2}$，$b_n = \dfrac{1}{3}\cdot 2^{n+1} - \dfrac{2}{3}\cdot(-1)^n$

(4)　$2^{2^{n+1}-1}$

4

(1)　$h(x) = g(x) + g'(x)$

(2)　$\dfrac{d}{dx}\{e^{-2x}f(x)\} = e^{-2x}\{g(x)+g'(x)\}$

(3)　証明は省略，$g(x) = e^{-x}$，$f(x) = e^{2x}$

(4)　$f(x) = \dfrac{9}{4}e^{2x} - \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{3}{2}x - \dfrac{5}{4}$

5

(1)　(1，2，3，4，5，10)　(2)　証明は省略

(3)　$\dfrac{8}{45}$　(4)　$\dfrac{5}{21}$