2022 年度　大阪大学（前期）

医学部　試験時間：150 分

全問必答

1　r を正の実数とする。複素数平面上で，点 z が点 $\dfrac{3}{2}$ を中心とする半径 r の円周上を動くとき，

$$z + w = zw$$

を満たす点 w が描く図形を求めよ。

2　$\alpha = \dfrac{2\pi}{7}$ とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$\cos 4\alpha = \cos 3\alpha$ であることを示せ。

(2)　$f(x) = 8x^3 + 4x^2 - 4x - 1$ とするとき，$f(\cos\alpha) = 0$ が成り立つことを示せ。

(3)　$\cos\alpha$ は無理数であることを示せ。

3　正の実数 t に対し，座標平面上の 2 点 $\mathrm{P}(0,\ t)$ と $\mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{t},\ 0\right)$ を考える。t が $1 \leqq t \leqq 2$ の範囲を動くとき，座標平面内で線分 PQ が通過する部分を図示せよ。

4　$f(x) = \log(1 + x) + 1$ とする。以下の問いに答えよ。

(1)　方程式 $f(x) = x$ は，$x>0$ の範囲でただ 1 つの解をもつことを示せ。

(2)　(1) の解を α とする。実数 x が $0<x<\alpha$ を満たすならば，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$0<\frac{\alpha - f(x)}{\alpha - x}<f'(x)$$

(3)　数列 $\{x_n\}$ を

$$x_1 = 1,\ x_{n+1} = f(x_n) \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で定める。このとき，すべての自然数 n に対して，

$$\alpha - x_{n+1}<\frac{1}{2}(\alpha - x_n)$$

が成り立つことを示せ。

(4)　(3) の数列 $\{x_n\}$ について，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$ を示せ。

5　座標平面において，t を媒介変数として

$$x = e^t \cos t + e^\pi,\ y = e^t \sin t \quad (0 \leqq t \leqq \pi)$$

で表される曲線を C とする。曲線 C と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

2022 年度　大阪大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1　$r=\dfrac{1}{2}$ のとき，点 2 を通り，実軸に垂直な直線，$r \neq \dfrac{1}{2}$ のとき，中心 $\dfrac{4r^2-3}{4r^2-1}$，半径 $\dfrac{4r}{|4r^2-1|}$ の円

2

(1)　証明は省略　(2)　証明は省略　(3)　証明は省略

3　図示は省略

4

(1)　証明は省略　(2)　証明は省略　(3)　証明は省略　(4)　証明は省略

5　$\dfrac{1}{4}(e^{2\pi}-1)$