

2022年度 京都大学 (前期)

医学部

試験時間：150分

全問必答

- 1** $5.4 < \log_4 2022 < 5.5$ であることを示せ。ただし、 $0.301 < \log_{10} 2 < 0.3011$ であることは用いてよい。
- 2** 箱の中に1から n までの番号がついた n 枚の札がある。ただし、 $n \geq 5$ とし、同じ番号の札はないとする。この箱から3枚の札を同時に取り出し、札の番号を小さい順に X, Y, Z とする。このとき、 $Y - X \geq 2$ かつ $Z - Y \geq 2$ となる確率を求めよ。
- 3** n を自然数とする。3つの整数 $n^2 + 2, n^4 + 2, n^6 + 2$ の最大公約数 A_n を求めよ。
- 4** 四面体OABCが
 $OA = 4, OB = AB = BC = 3, OC = AC = 2\sqrt{3}$
 を満たしているとする。Pを辺BC上の点とし、 $\triangle OAP$ の重心をGとする。このとき、次の各問に答えよ。
 (1) $\overrightarrow{PG} \perp \overrightarrow{OA}$ を示せ。
 (2) Pが辺BC上を動くとき、PGの最小値を求めよ。
- 5** 曲線 $C: y = \cos^3 x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$)、 x 軸および y 軸で囲まれる図形の面積を S とする。 $0 < t < \frac{\pi}{2}$ とし、 C 上の点 $Q(t, \cos^3 t)$ と原点O、および $P(t, 0), R(0, \cos^3 t)$ を頂点にもつ長方形OPQRの面積を $f(t)$ とする。このとき、次の各問に答えよ。
 (1) S を求めよ。
 (2) $f(t)$ は最大値をただ1つの t でとることを示せ。そのときの t を α とすると、 $f(\alpha) = \frac{\cos^4 \alpha}{3 \sin \alpha}$ であることを示せ。
 (3) $\frac{f(\alpha)}{S} < \frac{9}{16}$ を示せ。
- 6** 数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ を次の式


$$x_1 = 0, x_{n+1} = x_n + n + 2 \cos\left(\frac{2\pi x_n}{3}\right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

$$y_{3m+1} = 3m, y_{3m+2} = 3m + 2, y_{3m+3} = 3m + 4 \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$
 により定める。このとき、数列 $\{x_n - y_n\}$ の一般項を求めよ。

2022年度 京都大学 (前期)

医学部

(略解)

 証明, 図示などは省略**1** 証明は省略

2
$$\frac{(n-3)(n-4)}{n(n-1)}$$

3 6 を法とした合同式とする。

$$A_n = \begin{cases} 2 & (n \equiv 0) \\ 3 & (n \equiv 1) \\ 6 & (n \equiv 2) \\ 1 & (n \equiv 3) \\ 6 & (n \equiv 4) \\ 3 & (n \equiv 5) \end{cases}$$

4

(1) 証明は省略

(2) 最小値: $\frac{4}{3}$ **5**

(1) $S = \frac{2}{3}$

(2) 証明は省略

(3) 証明は省略

6 $x_n - y_n = \frac{1}{2}(n-1)n$