# 2022年度　三重大学（前期）

## 医学部　試験時間：120 分

全問必答

**1**　以下の問いに答えよ。

(1)　正の数からなる数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = 3{a_n}^5 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める。この数列の一般項を求めよ。

(2)　$a$，$b$ を正の実数とする。$a \leqq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{3-\log_{\frac{1}{2}} x+\log_2 b}$ が成り立つ $x$ の範囲を求めよ。

(3)　$\cos(x+y) - \cos x + \cos(x-y) = 0 \quad \left(0<x<\pi,\ 0<y<\dfrac{\pi}{2}\right)$ を満たす $(x,\ y)$ 全体を $xy$ 平面上に図示せよ。

(4)　$\alpha$ を正の実数，$\beta$ を複素数とする。複素数平面上の 3 点 0，$\alpha$，$\beta$ を頂点とする三角形の面積が 1 で，$\alpha$ と $\beta$ が $5\alpha^2 - 4\alpha\beta + \beta^2 = 0$ を満たすとき，$\alpha$ と $\beta$ の値を求めよ。

(5)　袋 A には赤球 3 個と白球 2 個，袋 B には赤球 5 個と白球 3 個が入っている。袋 A から球を 1 個取り出して，色を確認せずに袋 B に入れ，中身をよくかき混ぜた後，袋 B から球を 1 個取り出す。袋 B から取り出した球が白球であるとき，袋 A から取り出した球も白球であった確率を求めよ。

**2**　実数 $s$ に対して平面ベクトル $\overrightarrow{a}_1$，$\overrightarrow{b}_1$，$\overrightarrow{a}_2$，$\overrightarrow{b}_2$ を，成分を用いて

$$\overrightarrow{a}_1 = (x_1,\ y_1) + s(2,\ 1),\quad \overrightarrow{b}_1 = (-3,\ -1) + s(-2,\ -1),$$

$$\overrightarrow{a}_2 = (x_2,\ y_2) + s(0,\ 1),\quad \overrightarrow{b}_2 = (1,\ -3) + s(1,\ -2)$$

と定める。ただし $x_1$，$y_1$，$x_2$，$y_2$ は $s$ によらない定数で，内積について

$$\overrightarrow{a}_1 \cdot \overrightarrow{b}_2 = 10 + 7s,\quad \overrightarrow{a}_2 \cdot \overrightarrow{b}_1 = -12 - 7s - s^2$$

がすべての $s$ に対して成り立っているとする。実数 $t$ に対して

$$\overrightarrow{c}_1 = \overrightarrow{a}_1 + t\overrightarrow{b}_1,\quad \overrightarrow{c}_2 = \overrightarrow{a}_2 + t\overrightarrow{b}_2$$

とおくとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$x_1$，$y_1$，$x_2$，$y_2$ を求めよ。

(2)　$\overrightarrow{a}_1 \cdot \overrightarrow{a}_2$ を $s$ を用いて表せ。また $\overrightarrow{b}_1 \cdot \overrightarrow{b}_2$ を求めよ。さらに $\overrightarrow{c}_1$ と $\overrightarrow{c}_2$ が垂直になるとき，$t$ を $s$ で表せ。

(3)　$s$ を正の実数とする。$\overrightarrow{c}_1$ と $\overrightarrow{c}_2$ のすべての成分が整数であり，$\overrightarrow{c}_1$ と $\overrightarrow{c}_2$ が垂直になるとき，$s$ の値をすべて求めよ。

**3**　以下の問いに答えよ。

(1)　2 以上の自然数 $n$ に対し $\displaystyle\int_0^1 x^{n-1}e^{-\frac{n-1}{n}x^n-\frac{1}{n}}\,dx$ を求めよ。

(2)　$x>0$ とする。$\log x \leqq \dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{2}$ を示せ。さらにこの不等式を用いて

$$(n-3)\log x-\frac{n-1}{n}x^n+x^2-\frac{1}{n}\leqq 0 \quad (n=3,\ 4,\ 5,\ \cdots)$$

を示せ。

(3)　$x>0$ のとき $x^{n-1}e^{-\frac{n-1}{n}x^n-\frac{1}{n}} \leqq x^2e^{-x^2}$　$(n=3,\ 4,\ 5,\ \cdots)$ を示せ。さらにこの不等式を用いて $e^{-\frac{1}{3}} \leqq \displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ を示せ。

# 2022 年度　三重大学（前期）

## 医学部　（略解）

証明，図示などは省略

**1**

（1）　$a_n=3^{\frac{1}{4}(5^{n-1}-1)}$

（2）　$0<x \leqq \dfrac{1}{8ab}$

（3）　図示は省略

（4）　$\alpha=\sqrt{2}$，$\beta=2\sqrt{2}\pm\sqrt{2}i$

（5）　$\dfrac{44}{125}$

**2**

（1）　$x_1=4$，$y_1=-2$，$x_2=6$，$y_2=-6$

（2）　$\overrightarrow{a}_1\cdot\overrightarrow{a}_2=s^2+4s+36$，$\overrightarrow{b}_1\cdot\overrightarrow{b}_2=0$

（3）　$t=\dfrac{s^2+4s+36}{s^2+2}$

（4）　$s=2,\ 5,\ 8$

**3**

（1）　$\dfrac{1}{n-1}\left(e^{-\frac{1}{n}}-e^{-1}\right)$　　（2）　証明は省略　　（3）　証明は省略