2021 年度　群馬大学（前期）

医学部　試験時間：120 分　　全問必答

1　△OAB において，辺 AB 上に 2 つの点をとり，点 A に近い順にそれぞれ P，Q とする。線分 OP と線分 OQ は ∠AOB を 3 等分している。∠AOP の大きさを θ とし，さらに線分 AP，線分 PQ，線分 QB の長さをそれぞれ x，y，z とする。このとき，$\sin\theta$ を x，y，z で表せ。

2　M，A，E，B，A，S，H，I の 8 文字を使ってできる文字列について，次の問いに答えよ。ただし，A と A の 2 文字は区別せず，また，8 文字のうち母音は A，E，I である。

(1)　8 文字すべてを使ってできる文字列はいくつあるか。

(2)　8 文字すべてを使ってできる文字列のなかで，A が隣り合うものはいくつあるか。

(3)　8 文字すべてを使ってできる文字列のなかで，どの母音も隣り合わないものはいくつあるか。

(4)　M，A，E，B，S，H，I の 7 文字を 3 組に分ける方法は何通りあるか。ただし，3 組の区別はしない。

3　k と l は $0<k<1$, $0<l<1$ を満たす。△OAB は 1 辺の長さが 1 の正三角形とし，辺 OA を $k:(1-k)$ に内分する点を C，辺 OB を $l:(1-l)$ に内分する点を D とする。O を通り直線 CD に垂直な直線と，直線 AB との交点を E とする。E が線分 AB を $(1+m):m$ に外分するとき，次の問いに答えよ。ただし，$m>0$ である。

(1)　$k>2l$ が成り立つことを示せ。

(2)　m を k と l を用いて表せ。

(3)　直線 CD と直線 OE との交点を P とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を満たす s を k と l を用いて表せ。

(4)　$k=3l$ のとき，前問 (3) の s を l を用いて表せ。

4　次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ について答えよ。n を正の整数とするとき，

$$a_1=1,\ b_1=\sqrt{2},\ a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2},\ b_{n+1}=\frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}$$

(1)　不等式 $b_m<a_m$ を満たす正の整数 m をすべて求めよ。

(2)　a_1，b_1，a_m，b_m，a_{m+1}，b_{m+1} の大小関係を不等号 $<$ を用いて表せ。ここで，m は 2 以上の整数である。

(3)　n を正の整数とするとき，不等式 $|a_n-b_n|<2^{(1-2^n)}$ が成り立つことを証明せよ。

5　a，b，c，d を実数の定数とするとき，すべての実数 x で定義された関数 $f(x)$ について，次の問いに答えよ。

$$f(x)=\begin{cases} x & (x \leqq 0), \\ x^3+ax^2+bx+c & (0<x \leqq 1), \\ 0 & (1<x \leqq 2), \\ de^{-\frac{1}{x-2}} & (x>2). \end{cases}$$

ここで，任意の正の実数 X と任意の正の整数 n について，$e^X \geqq \dfrac{X^n}{n!}$ が成り立つことを使ってよい。

(1)　関数 $f(x)$ がすべての x で微分可能であるための，a，b，c，d についての必要十分条件を求めよ。

(2)　a，b，c，d が上の (1) で与えられた必要十分条件を満たすとき，関数 $f(x)$ の $x=0$，$x=1$，$x=2$ における微分係数をそれぞれ求めよ。

2021 年度　群馬大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

$\sin\theta = \dfrac{1}{2}\sqrt{3-\dfrac{y}{zx}(x+y+z)}$

2

（1）　20160（個）　（2）　5040（個）　（3）　1440（個）　（4）　301（個）

3

（1）　証明は省略

（2）　$m=\dfrac{-2l+k}{l+k}$

（3）　$s=\dfrac{kl(k+l)}{2(k^2-kl+l^2)}$

（4）　$s=\dfrac{6}{7}l$

4

（1）　2 以上の任意の整数

（2）　$a_1<b_m<b_{m+1}<a_{m+1}<a_m<b_1$

（3）　証明は省略

5

（1）　$(a,\ b,\ c)=(-2,\ 1,\ 0)$ かつ d は任意の実数

（2）　$f'(0)=1$，$f'(1)=0$，$f'(2)=0$