2021 年度　筑波大学（前期）

医学部　試験時間：120 分　　全問必答

1　xy 平面において 2 つの円

$C_1 : x^2 - 2x + y^2 + 4y - 11 = 0,$

$C_2 : x^2 - 8x + y^2 - 4y + k = 0$

が外接するとし，その接点を P とする。以下の問いに答えよ。

(1)　k の値を求めよ。

(2)　P の座標を求めよ。

(3)　円 C_1 と円 C_2 の共通接線のうち点 P を通らないものは 2 本ある。これら 2 直線の交点 Q の座標を求めよ。

2　$t = \sin\theta + \cos\theta$ とし，θ は $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くものとする。

(1)　t のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　$\sin^3\theta + \cos^3\theta$ と $\cos 4\theta$ を，それぞれ t を用いて表せ。

(3)　$\sin^3\theta + \cos^3\theta = \cos 4\theta$ であるとき，t の値をすべて求めよ。

3　O を原点とする座標空間において，3 点 A$(-2, 0, 0)$，B$(0, 1, 0)$，C$(0, 0, 1)$ を通る平面を α とする。2 点 P$(0, 5, 5)$，Q$(1, 1, 1)$ をとる。点 P を通り $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ に平行な直線を ℓ とする。直線 ℓ 上の点 R から平面 α に下ろした垂線と α の交点を S とする。$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$（ただし k は実数）とおくとき，以下の問いに答えよ。

(1)　k を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{AS}}$ を成分で表せ。

(2)　点 S が $\triangle$ABC の内部または周にあるような k の値の範囲を求めよ。

4　p，q を定数とし，$0<p<1$ とする。

曲線 C_1　:　$y=px^{\frac{1}{p}}$　$(x>0)$ と，

曲線 C_2　:　$y=\log x+q$　$(x>0)$

が，ある 1 点 $(a,\ b)$ において同じ直線に接するとする。曲線 C_1，直線 $x=a$，直線 $x=e^{-q}$ および x 軸で囲まれた図形の面積を S_1 とする。また，曲線 C_2，直線 $x=a$ および x 軸で囲まれた図形の面積を S_2 とする。

(1)　q を p を用いて表せ。

(2)　S_1，S_2 を p を用いて表せ。

(3)　$\dfrac{S_2}{S_1}\geqq\dfrac{3}{4}$ であることを示せ。ただし，$2.5<e<3$ を用いてよい。

5　O を原点とする xy 平面において，点 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$ と点 $\mathrm{B}(2,\ 0)$ をとる。円 $x^2+y^2=1$ の，$x\geqq 0$ かつ $y\geqq 0$ を満たす部分を C とし，また点 B を通り y 軸に平行な直線を ℓ とする。2 以上の整数 n に対し，曲線 C 上に点 P，Q を

$$\angle\mathrm{POB}=\frac{\pi}{n},\ \angle\mathrm{QOB}=\frac{\pi}{2n}$$

を満たすようにとる。直線 AP と直線 ℓ の交点を V とし，直線 AQ と直線 ℓ の交点を W とする。線分 AP，線分 AQ および曲線 C で囲まれた図形の面積を $S(n)$ とする。また線分 PV，線分 QW，曲線 C および線分 VW で囲まれた図形の面積を $T(n)$ とする。

(1)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\{S(n)+T(n)\}$ を求めよ。

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{T(n)}{S(n)}$ を求めよ。

6　i は虚数単位とする。複素数平面において，複素数 z の表す点 P を $\mathrm{P}(z)$ または点 z と書く。$\omega=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ とおき，3 点 $\mathrm{A}(1)$，$\mathrm{B}(\omega)$，$\mathrm{C}(\omega^2)$ を頂点とする $\triangle\mathrm{ABC}$ を考える。

(1)　$\triangle\mathrm{ABC}$ は正三角形であることを示せ。

(2)　点 z が辺 AC 上を動くとき，点 $-z$ が描く図形を複素数平面上に図示せよ。

(3)　点 z が辺 AB 上を動くとき，点 z^2 が描く図形を E_1 とする。また点 z が辺 AC 上を動くとき，点 z^2 が描く図形を E_2 とする。E_1 と E_2 の共有点をすべて求めよ。

2021 年度　筑波大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

(1) $k=19$　(2) $\mathrm{P}\left(\dfrac{17}{5},\ \dfrac{6}{5}\right)$　(3) $\mathrm{Q}\left(5,\ \dfrac{10}{3}\right)$

2

(1) $-1<t\leqq\sqrt{2}$

(2) $\sin^3\theta+\cos^3\theta=-\dfrac{1}{2}t^3+\dfrac{3}{2}t$，$\cos 4\theta=-2t^4+4t^2-1$

(3) $t=1$，$\dfrac{-7+\sqrt{17}}{8}$

3

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AS}}=\left(\dfrac{4(k+3)}{3},\ \dfrac{k+3}{3},\ \dfrac{k+3}{3}\right)$　(2) $-3\leqq k\leqq-\dfrac{3}{2}$

4

(1) $q=p$

(2) $S_1=\dfrac{p^2}{1+p}\{1-e^{-(p+1)}\}$，$S_2=-1+p+e^{-p}$

(3) 証明は省略

5

(1) $\dfrac{9}{8}\pi$　(2) $\dfrac{5}{4}$

6

(1) 証明は省略　(2) 図示は省略　(3) $-\dfrac{1}{3}$，1