2021 年度　秋田大学（前期）

医学部　試験時間：90 分

全問必答

1　関数 $f(x)=\dfrac{1}{1+e^x}$ について，次の問いに答えなさい。

(1)　x が実数全体を動くとき，$f(x)$ のとりうる値の範囲を求めなさい。

(2)　定積分 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ を求めなさい。

(3)　a を実数とする。点 $(a,\ f(a))$ における曲線 $y=f(x)$ の接線を ℓ とし，ℓ と直線 $y=2$ との交点を P，ℓ と直線 $y=-1$ との交点を Q とする。このとき，線分 PQ の長さが最小となる a の値を求めなさい。

2　次の問いに答えなさい。ただし，i は虚数単位とする。

(1)　複素数 α，β が $|\alpha+\beta|=|\alpha-\beta|=1$ を満たすとき，$|\alpha\beta|$ の最大値を求めなさい。

(2)　複素数 α，β が $\alpha\beta=1$ を満たすとする。原点を O とする複素数平面上において，α の表す点を P とし，β の表す点を Q とする。線分 OP が実軸の正の向きとなす角を θ とし，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。△OPQ の面積が $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ のとき，θ の値を求めなさい。

(3)　m，n を $1\leqq m\leqq 10$，$1\leqq n\leqq 10$ を満たす整数とする。

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^m\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^n=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$$

となる m，n の組を求めなさい。

3　座標空間に 4 点 $\mathrm{A}(1,\ -2,\ -2)$，$\mathrm{B}(3,\ 2,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 3,\ 2)$，$\mathrm{D}(4,\ -1,\ 0)$ をとる。点 A，B，C，D，A を順に線分で結んでできる折れ線 L = ABCDA を考える。次の問いに答えなさい。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ のなす角を α，$\overrightarrow{\mathrm{DA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ のなす角を β とする。α と β の大小を比較しなさい。

(2)　k を定数とする。折れ線 L において y 座標が k 以上である部分を L_1，y 座標が k 以下である部分を L_2 とする。L_1 の長さと L_2 の長さが等しくなるように，k の値を定めなさい。

(3)　折れ線 L 上を動く点 P が，点 A を出発し，B，C，D を順に通って A に戻るとする。2 点 A，P 間の距離 AP が増加から減少に変わるときの点 P の座標，および AP が減少から増加に変わるときの点 P の座標を求めなさい。

4　関数 $f(x)=e^{x^3-x}$ について，次の問いに答えなさい。

(1)　k を定数とするとき，関数 $y=f(x)$ のグラフと直線 $y=k$ との共有点の個数を求めなさい。

(2)　関数 $y=f(x)$ のグラフと $y=e^x$ のグラフとの共有点の座標を求めなさい。

(3)　D を $y=f(x)$ のグラフと $y=e^x$ のグラフで囲まれた部分とする。m を定数とし，直線 $y=m$ のうち D との共通部分が，線分または互いに交わらない線分の集まりであるとき，それらの線分の長さの合計を，直線 $y=m$ の D 部分の長さとよぶ。$m \neq e^{\frac{1}{3}}$ として，直線 $y=e^{\frac{1}{3}}$ の D 部分の長さと直線 $y=m$ の D 部分の長さが等しくなるように，m の値を 1 つ定めなさい。

2021 年度　秋田大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

(1)　$0<f(x)<1$　　(2)　$\log\dfrac{2e}{e+1}$　　(3)　$a=0$

2

(1)　$\dfrac{1}{2}$　　(2)　$\theta=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{3}$

(3)　$(m,\ n)=(3,\ 3),\ (9,\ 3),\ (6,\ 7)$

3

(1)　$\alpha>\beta$　　(2)　$k=3-\sqrt{6}$

(3)　増加から減少：$\mathrm{P}(0,\ 3,\ 2)$，$\mathrm{P}(4,\ -1,\ 0)$，減少から増加：$\mathrm{P}\left(\dfrac{32}{9},\ -\dfrac{5}{9},\ \dfrac{2}{9}\right)$

4

(1)　$\begin{cases} k\leqq 0 \text{ のとき} & 0\text{ 個} \\ 0<k<e^{-\frac{2\sqrt{3}}{9}},\ e^{\frac{2\sqrt{3}}{9}}<k \text{ のとき} & 1\text{ 個} \\ k=e^{-\frac{2\sqrt{3}}{9}},\ e^{\frac{2\sqrt{3}}{9}} \text{ のとき} & 2\text{ 個} \\ e^{-\frac{2\sqrt{3}}{9}}<k<e^{\frac{2\sqrt{3}}{9}} \text{ のとき} & 3\text{ 個} \end{cases}$

(2)　$\left(-\sqrt{2},\ e^{-\sqrt{2}}\right)$，$(0,\ 1)$，$\left(\sqrt{2},\ e^{\sqrt{2}}\right)$

(3)　$m=e^{-\frac{1}{3}}$