

2021 年度 熊本大学 (前期)

医学部

試験時間：120 分

📖 全問必答

1 空間の点 O を通らない平面 α をとる。 α 上の 3 点 A, B, C は三角形をなすとし、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおく。 k を 1 より大きい定数とする。直線 l は媒介変数 t を用いて

$$\frac{k}{3}(\vec{b} + 2\vec{c}) + \frac{tk}{3}(2\vec{a} - \vec{b} - \vec{c})$$

と表せるとする。 l 上を点 X が動くとき、2 点 O, X を通る直線と平面 α の交点 Y の軌跡を m とする。

- (1) $\triangle ABC$ の各辺と m との交点の個数をそれぞれ求めよ。また、交点がある場合、各交点 Z について、 \overrightarrow{OZ} を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いてそれぞれ表せ。
- (2) A, B の中点を D とする。 l を含み α に平行な平面を β とし、 O, D を通る直線と平面 β の交点を E とする。点 O と m 上の点 Y を通る直線は 2 点 E, C を通る直線と交点をもつとし、その交点を F とする。このとき、 \overrightarrow{OF} を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ および k を用いて表せ。

2 複素数 w は実部、虚部ともに正であるとする。相異なる複素数 α, β, γ は

$$\{(w+2)\alpha\}^2 + (w\beta)^2 - (2\gamma)^2 = 4(w+2)\alpha^2 + 2w^2\alpha\beta - 8\alpha\gamma$$

を満たすとする。 α, β, γ を表す複素数平面上の点をそれぞれ A, B, C とする。

- (1) $\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$ の偏角 θ ($0 \leq \theta < 2\pi$) のとりうる範囲を求めよ。
- (2) $\triangle ABC$ が正三角形であるときの w の値を求めよ。
- (3) $\triangle ABC$ が正三角形であるとする。 $w = \alpha$ かつ $\triangle ABC$ の重心が点 $\frac{w^2}{2}$ であるとき、 β と γ の値を求めよ。

3 媒介変数 t を用いて表された曲線

$$C: x = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}), y = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$$

を考える。

- (1) 点 M の座標を $(0, 1)$ とする。曲線 C 上の点 P に対して、 MP を最小にする t の値 t_0 を求めよ。
- (2) (1) の t_0 に対する曲線 C 上の点を Q とする。 Q における C の接線を l とするとき、曲線 C と接線 l および x 軸で囲まれた部分 D の面積を求めよ。
- (3) (2) の D を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

4 次の問いに答えよ。

- (1) n を正の整数とするととき、定積分 $\int_0^{2\pi} |\sin nx - \sin 2nx| dx$ を求めよ。
- (2) c を正の数とするととき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^c |\sin nx - \sin 2nx| dx$ を求めよ。

2021年度 熊本大学 (前期)

医学部

(略解)

☞ 証明, 図示などは省略

1

(1) 辺 AB : 0 個, 辺 BC : 1 個で $\vec{OZ} = \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}$, 辺 CA : 1 個で $\vec{OZ} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{c}$

(2) $\vec{OF} = \frac{k}{5k+4}(2\vec{a} + 2\vec{b} + 5\vec{c})$

2

(1) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ または $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

(2) $w = 1 + \sqrt{3}i$

(3) $\beta = -2 + 2\sqrt{3}i$, $\gamma = -2$

3

(1) $t_0 = \log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

(2) $\frac{1}{2} \log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \frac{\sqrt{5}}{10}$

(3) $\frac{\pi}{30}$

4

(1) 5

(2) $\frac{5c}{2\pi}$