2021 年度　東海大学（前期 1 日目）

医学部　　試験時間：70 分

全問必答

1　次の空欄を埋めなさい。解答は分数の場合には既約分数の形で書きなさい。

(1)　自然数 a，b について等式 $(a+b\sqrt{3})^3 = 530 + 306\sqrt{3}$ が成り立つとき，$a =$ $\boxed{\text{ア}}$，$b =$ $\boxed{\text{イ}}$ である。

(2)　$\dfrac{611}{893}$ を既約分数で表すと $\boxed{\text{ウ}}$ である。

(3)　△OAB において，辺 OB を 7：3 に外分する点を C とする。s を正の実数とし，線分 AC を 2：s に内分する点を P とするとき，線分 OP と辺 AB の交点 Q は OP を s：1 に内分している。このときの s の値は $s =$ $\boxed{\text{エ}}$ である。

(4)　r は正の定数とする。実数 x，y に関する条件 p，q を次で定める。

p：$-5 \leqq x+y \leqq 5$ かつ $-5 \leqq x-y \leqq 5$

q：$x^2+y^2-2x-4y+5 \leqq r^2$

(i)　「p は q であるための必要条件である」ような正の定数 r の範囲は $\boxed{\text{オ}}$ である。

(ii)　「p は q であるための十分条件である」ような正の定数 r の範囲は $\boxed{\text{カ}}$ である。

(5)　数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ に対して数列 $\{c_n\}$ を次のように定義する。

$$c_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k} \quad (n = 2,\ 3,\ \cdots)$$

$a_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$，$b_n = \dfrac{1}{3^{n-1}}$　$(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ であるとき，$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} c_n =$ $\boxed{\text{キ}}$ である。

2　本問において複素数を解答欄に書くときは，極形式を用いないで答えよ。
等式 $z+\dfrac{1}{z}=\sqrt{3}$ を満たす複素数のうち，虚部が正であるものを α とするとき，$\alpha=$ $\boxed{\text{ア}}$ である。

(1)　p，q を実数とする。方程式 $|p+\alpha q|=1$ を満たす p と q の組の中で，q の値が最大となる組は $p=$ $\boxed{\text{イ}}$，$q=$ $\boxed{\text{ウ}}$ である。また，方程式 $|p+\alpha q|=1$ かつ $|p+iq|=1$ を満たす p と q の組の中で，q の値が最大となる組は $p=$ $\boxed{\text{エ}}$，$q=$ $\boxed{\text{オ}}$ である。

(2)　次の 2 つの条件を満たす複素数 p と q の組を考える。

(a)　$|q|=1$ かつ αq は実数である。

(b)　$|p+\alpha q|=1$ かつ $|p|=\sqrt{3}$。

このような p と q の組の中で p の実部が負，虚部が正であるものは $p=$ $\boxed{\text{カ}}$，$q=$ $\boxed{\text{キ}}$ である。

(3)　p を複素数，q を絶対値が 1，偏角が $\dfrac{\pi}{3}$ の複素数とする。方程式 $|p+\alpha q|=1$ を満たす点 p は，点 $\boxed{\text{ク}}$ を中心とする半径 $\boxed{\text{ケ}}$ の円を描く。また，方程式 $|p+\alpha q|=1$ かつ $|p+\overline{\alpha}q|=1$ かつ $|p|=\sqrt{3}$ を満たす複素数 p は $p=$ $\boxed{\text{コ}}$ である。

3　区間 $0\leqq x\leqq 1$ において定義された 2 つの関数 $f(x)$，$g(x)$ に対して

$$I_n(f(x),\,g(x))=\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\left(g\left(\frac{k}{n}\right)-g\left(\frac{k-1}{n}\right)\right)\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

とおく。

(1)　$f(x)=x^2$，$g(x)=x^3$ のとき，

$$\begin{aligned}I_n(x^2,\,x^3)&=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\left(\left(\frac{k}{n}\right)^3-\left(\frac{k-1}{n}\right)^3\right)\\&=\frac{1}{n^5}\sum_{k=1}^{n}\left(\boxed{\text{ア}}k^4+\boxed{\text{イ}}k^3+\boxed{\text{ウ}}k^2\right)\end{aligned}$$

と表されるので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}I_n(x^2,\,x^3)=$ $\boxed{\text{エ}}$ である。

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}I_n(\sin\pi x,\,x^2)=$ $\boxed{\text{オ}}$

(3)　区間 $0\leqq x\leqq 1$ において，次の 3 つの関数 $h_1(x)$，$h_2(x)$，$h_3(x)$ を考える。

$$h_1(x)=x-x^2,\ h_2(x)=1-e^{-x},\ h_3(x)=x$$

(i)　$h_1(x)-h_2(x)$ の $0\leqq x\leqq 1$ における最大値は $\boxed{\text{カ}}$ であり，最小値は $\boxed{\text{キ}}$ である。

(ii)　$h_2(x)-h_3(x)$ の $0\leqq x\leqq 1$ における最大値は $\boxed{\text{ク}}$ であり，最小値は $\boxed{\text{ケ}}$ である。

(iii)　$I_n(x^2,\,e^x)$ を $h_2(x)$ を用いて表すと，

$$I_n(x^2,\,e^x)=\sum_{k=1}^{n}\boxed{\text{コ}}\,h_2\left(\frac{1}{n}\right)$$

である。

(i)，(ii)，(iii) を利用すると，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}I_n(x^2,\,e^x)=$ $\boxed{\text{サ}}$ である。したがって，

$$\lim_{n\to\infty}\{I_n(x^2,\,e^x)+I_n(e^x,\,x^2)\}=\boxed{\text{シ}}$$

2021 年度　東海大学（前期 2 日目）

医学部　　試験時間：70 分

全問必答

1　次の空欄を埋めなさい。解答は分数の場合には既約分数の形で書きなさい。

(1)　3 直線 $x-y=0$，$x+y-2=0$，$3x-y-6=0$ の各交点を頂点とする三角形に内接する円の中心の座標は $\left(\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イ}}\right)$ である。

(2)　${}_{20}\mathrm{C}_7$ と $\dfrac{20!}{2^{10}\cdot 3^6\cdot 5^4\cdot 7^2}$ の最大公約数を素因数分解すると $\boxed{\text{ウ}}$ である。

(3)　複素数平面上の点 $z=\cos\dfrac{13}{12}\pi+i\sin\dfrac{13}{12}\pi$ を点 $z_0=\boxed{\text{エ}}+\boxed{\text{オ}}\,i$ を中心に $\dfrac{\pi}{6}$ だけ回転した点は，$w=\cos\dfrac{17}{12}\pi+i\sin\dfrac{17}{12}\pi$ である。ただし，$\boxed{\text{エ}}$ と $\boxed{\text{オ}}$ は実数とする。

(4)　$f(x)=\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\tan(x+h)+\tan(x-h)-2\tan x}{h^2}$ とするとき，$f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\boxed{\text{カ}}$ である。

(5)　$\triangle\mathrm{ABC}$ の内部にある点 P は，$2\overrightarrow{\mathrm{AP}}+3\overrightarrow{\mathrm{BP}}+4\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\overrightarrow{0}$ を満たすという。2 点 A，P を結ぶ直線 AP と直線 BC との交点を D とするとき，$\dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{CD}}=\boxed{\text{キ}}$ であり，$\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PD}}=\boxed{\text{ク}}$ である。

(6)　$\displaystyle\int_{\sqrt{\sqrt{e}-1}}^{\sqrt{e^2-1}}\frac{x\log(\log(x^2+1))}{x^2+1}\,dx=\boxed{\text{ケ}}$

2

(1)

(i)　$x\leqq\dfrac{1}{3}$ のとき，関数 $y=\dfrac{1}{1-x}$ は $x=\boxed{\text{ア}}$ で最大値 $\boxed{\text{イ}}$ をとる。

(ii)　$x>\dfrac{1}{3}$ のとき，関数 $y=\dfrac{5x-1}{x^2}$ は $x=\boxed{\text{ウ}}$ で最大値 $\boxed{\text{エ}}$ をとる。

(2)　u は実数，t は $0<t<1$ を満たすとする。空間の 3 点 $\mathrm{P}(1,0,0)$，$\mathrm{Q}(u,1,0)$，$\mathrm{R}(0,0,1)$ と平面 H：$x=t$ を考える。四面体 OPQR を H で切ったとき，切り口の面積を S，点 P を含む立体の体積を V，原点 O を含む立体の体積を W とする。

(i)　$u\leqq\dfrac{1}{3}$ かつ $t=\dfrac{1}{3}$ とする。S は $u=\boxed{\text{オ}}$ のとき最大値 $\boxed{\text{カ}}$ をとる。また，$3V=2W$ を満たす u の値は $u=\boxed{\text{キ}}$ である。

(ii)　$u>\dfrac{1}{3}$ かつ $0<t\leqq\dfrac{1}{3}$ とする。H と線分 QR の交点の座標を u，t を用いて表すと，$\left(\boxed{\text{ク}},\ \boxed{\text{ケ}},\ \boxed{\text{コ}}\right)$ である。

(iii)　$u>\dfrac{1}{3}$ かつ $t=\dfrac{1}{3}$ とする。S は $u=\boxed{\text{サ}}$ のとき最大値 $\boxed{\text{シ}}$ をとる。また，$V=W$ を満たす u の値は $u=\boxed{\text{ス}}$ である。

3　関数 $f_1(x)$，$f_2(x)$，$f_3(x)$，$\cdots$（$x \geqq 0$）を以下で定める。

$$f_1(x)=\frac{x+3}{x+2},\ f_{n+1}(x)=f_n\left(\frac{1}{x+2}\right)\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

このとき，次の式を満たすように定められた数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ を考える。

$$f_n(x)=\frac{a_{n-1}x+a_n}{b_{n-1}x+b_n}\quad (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

ただし，$a_1=3$，$b_1=2$ とする。

(1)　$a_2=$ $\boxed{\text{ア}}$，$b_2=$ $\boxed{\text{イ}}$，$a_3=$ $\boxed{\text{ウ}}$，$b_3=$ $\boxed{\text{エ}}$

(2)　数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ はそれぞれ次の漸化式を満たす。

(a)　$a_{n+2}=\boxed{\text{オ}}\,a_{n+1}+\boxed{\text{カ}}\,a_n$

(b)　$b_{n+2}=\boxed{\text{キ}}\,b_{n+1}+\boxed{\text{ク}}\,b_n$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(3)　(2) の (a) は次のように変形できる。

$$\begin{cases} a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n) \\ a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n) \end{cases}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

このときの α，β の値はそれぞれ，$\alpha=$ $\boxed{\text{ケ}}$，$\beta=$ $\boxed{\text{コ}}$ である。ただし，$\alpha>\beta$ とする。
$c_n=a_{n+1}-\alpha a_n$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおくとき，数列 $\{c_n\}$ の一般項は $c_n=\boxed{\text{サ}}\,\beta^{n-1}$ である。
したがって，$\{a_n\}$ の一般項 a_n は

$$a_n=\boxed{\text{シ}}\,\alpha^{n-1}+\boxed{\text{ス}}\,\beta^{n-1}$$

である。また，$\{b_n\}$ の一般項 b_n は

$$b_n=\boxed{\text{セ}}\,\alpha^{n-1}+\boxed{\text{ソ}}\,\beta^{n-1}$$

である。ただし，$\boxed{\text{サ}}$ ～ $\boxed{\text{ソ}}$ は α，β を用いないで答えよ。

(4)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(0)=\boxed{\text{タ}}$

2021 年度　東海大学（前期 1 日目）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

(1)　ア：5　イ：3

(2)　ウ：$\dfrac{13}{19}$

(3)　エ：4

(4)　オ：$0<r \leqq \sqrt{2}$　カ：$r \geqq 5\sqrt{2}$

(5)　キ：3

2

(1)　ア：$\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$　イ：$-\sqrt{3}$　ウ：2　エ：0　オ：1

(2)　カ：$\dfrac{-3+\sqrt{3}i}{2}$　キ：$\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}$

(3)　ク：$-i$　ケ：1　コ：$\dfrac{-\sqrt{3}-3i}{2}$

3

(1)　ア：3　イ：-3　ウ：1　エ：$\dfrac{3}{5}$

(2)　オ：$\dfrac{2}{\pi}$

(3)　カ：0　キ：$-1+\dfrac{1}{e}$　ク：0　ケ：$-\dfrac{1}{e}$　コ：$\left(\dfrac{k}{n}\right)^2 e^{\frac{k}{n}}$　サ：$e-2$　シ：e

2021 年度　東海大学（前期 2 日目）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

(1)　ア : $4-\sqrt{5}$　イ : 1

(2)　ウ : $2^4\cdot 3\cdot 17\cdot 19$

(3)　エ : $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　オ : $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(4)　カ : $\dfrac{8\sqrt{3}}{9}$

(5)　キ : $\dfrac{4}{3}$　ク : $\dfrac{7}{2}$

(6)　ケ : $\dfrac{5}{4}\log 2-\dfrac{3}{4}$

2

(1)

(i)　ア : $\dfrac{1}{3}$　イ : $\dfrac{3}{2}$

(ii)　ウ : $\dfrac{2}{5}$　エ : $\dfrac{25}{4}$

(2)

(i)　オ : $\dfrac{1}{3}$　カ : $\dfrac{1}{3}$　キ : $\dfrac{7}{27}$

(ii)　ク : t　ケ : $\dfrac{t}{u}$　コ : $1-\dfrac{t}{u}$

(iii)　サ : $\dfrac{2}{5}$　シ : $\dfrac{25}{72}$　ス : $\dfrac{8+\sqrt{10}}{27}$

3

(1)　ア : 7　イ : 5

(2)　ウ : 17　エ : 12

(3)　オ : 2　カ : 1　キ : 2　ク : 1

(4)　ケ : $1+\sqrt{2}$　コ : $1-\sqrt{2}$　サ : $4-3\sqrt{2}$　シ : $\dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}$　ス : $\dfrac{3-2\sqrt{2}}{2}$　セ : $\dfrac{4+3\sqrt{2}}{4}$　ソ : $\dfrac{4-3\sqrt{2}}{4}$

(5)　タ : $\sqrt{2}$