

2021 年度 東北大学 (前期)

医学部

試験時間 : 150 分

全問必答

1 a, b を実数とする。曲線 $y = ax^2 + bx + 1$ が x 軸の正の部分と共有点をもたないような点 (a, b) の領域を図示せよ。

2 a, b を $0 < a < 1, 0 < b < 1$ を満たす実数とする。平面上の三角形 ABC を考え、辺 AB を $a : 1 - a$ に内分する点を P 、辺 BC を $b : 1 - b$ に内分する点を Q 、辺 CA の中点を R とし、三角形 ABC の面積を S 、三角形 PQR の面積を T とする。

(1) $\frac{T}{S}$ を a, b で表せ。

(2) a, b が $0 < a < \frac{1}{2}, 0 < b < \frac{1}{2}$ の範囲を動くとき、 $\frac{T}{S}$ がとりうる値の範囲を求めよ。

(3) p, q を 3 以上の整数とし、 $a = \frac{1}{p}, b = \frac{1}{q}$ とする。 $\frac{T}{S}$ の逆数 $\frac{S}{T}$ が整数となるような p, q の組 (p, q) をすべて求めよ。

3 正八角形 $A_1A_2 \cdots A_8$ について、以下の問いに答えよ。

(1) 3 個の頂点を結んでできる三角形のうち、直角三角形であるものの個数を求めよ。

(2) 3 個の頂点を結んでできる三角形のうち、直角三角形でも二等辺三角形でもないものの個数を求めよ。

(3) 4 個の頂点を結んでできる四角形のうち、次の条件 (*) を満たすものの個数を求めよ。

(*) 四角形の 4 個の頂点から 3 点を選んで直角三角形を作れる。

4 座標平面において、次の条件 (*) を満たす直線 l を考える。

(*) l の傾きは 1 で、曲線 $y = x^3 - 2x$ と異なる 3 点で交わる。

その交点を x 座標が小さなものから順に P, Q, R とし、さらに線分 PQ の中点を S とする。

(1) 点 R の座標を $(a, a^3 - 2a)$ とするとき、点 S の座標を求めよ。

(2) 直線 l が条件 (*) を満たしながら動くとき、点 S の軌跡を求めよ。

(3) 直線 l が条件 (*) を満たしながら動くとき、線分 PS が動いてできる領域の面積を求めよ。

5 z を複素数とする。複素数平面上の 3 点 $O(0)$, $A(z)$, $B(z^2)$ について, 以下の問いに答えよ。

- (1) 3 点 O , A , B が同一直線上にあるための z の必要十分条件を求めよ。
- (2) 3 点 O , A , B が二等辺三角形の頂点になるような z 全体を複素数平面上に図示せよ。
- (3) 3 点 O , A , B が二等辺三角形の頂点であり, かつ z の偏角 θ が $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ を満たすとき, 三角形 OAB の面積の最大値とそのときの z の値を求めよ。

6 以下の問いに答えよ。

- (1) 正の実数 a と正の整数 n に対して次の等式が成り立つことを示せ。ただし, e は自然対数の底とする。

$$e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \cdots + \frac{a^n}{n!} + \int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!} e^x dx$$

- (2) 正の実数 a と正の整数 n に対して次の不等式を示せ。

$$\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \leq \int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!} e^x dx \leq \frac{e^a a^{n+1}}{(n+1)!}$$

- (3) 不等式

$$\left| e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right) \right| < 10^{-3}$$

を満たす最小の正の整数 n を求めよ。必要ならば $2 < e < 3$ であることは証明なしに用いてもよい。

2021 年度 東北大学 (前期)

医学部

(略解)

☞ 証明, 図示などは省略

1 図示は省略**2**

(1) $\frac{T}{S} = ab - \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}$

(3) $(p, q) = (4, 6), (6, 4)$

(2) $\frac{1}{4} < \frac{T}{S} < \frac{1}{2}$

3

(1) 24 (個)

(2) 16 (個)

(3) 54 (個)

4

(1) $S\left(-\frac{1}{2}a, a^3 - \frac{7}{2}a\right)$

(2) $y = -8x^3 + 7x \quad \left(-1 < x < -\frac{1}{2}\right)$

(3) $\frac{27}{8}$

5

(1) z が実数

(2) 図示は省略

(3) 最大値: $\frac{3\sqrt{3}}{4} \quad \left(z = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

6

(1) 証明は省略

(2) 証明は省略

(3) $n = 6$